

TP 2 : Modèle géométrique direct (MGD) d'un bras manipulateur

Objectif :

L'objectif de ce TP est l'étude du modèle géométrique direct de deux robots bras manipulateur RRRRR et RRRR. Cette étude exploitera et par la suite validera la modélisation étudiée dans le TP1 par la prise d'exemples et leur vérification réellement.

Le modèle géométrique direct (Forward Kinematics) permet le calcul des coordonnées cartésiennes (P_x, P_y, P_z) de l'effecteur en fonction des angles des joints ($\theta_1, \dots, \theta_n$) et de la longueur des liens.

Ce calcul sera fait en exploitant le logiciel `Matlab` de deux manières différentes :

- ✱ **Utilisation de la bibliothèque `Symbolic Tool Box (STB)`** : Les matrices de transformation homogène élémentaire ($i-1, i$) seront saisies en mode `syms` (symbolique). La matrice de transformation homogène globale (base-effecteur) fournira les équations reliant les coordonnées cartésiennes de l'effecteur en fonction des angles des articulations et de la longueur des liens.
- ✱ **Utilisation de la bibliothèque `Robotics Toolbox (RTB)`** de Peter Corke : Chaque lien "i" sera saisi séparément en précisant les coefficients θ_i, d_i, a_i et α_i . Ces liens seront reliés ensemble par l'instruction `SerialLink`. L'instruction `fkine` permettra de déterminer la matrice de transformation homogène globale (base-effecteur). Sa quatrième colonne déterminera les coordonnées cartésiennes de l'effecteur.

Plan :

1. Introduction
2. Méthode 1 : `Symbolic Math Toolbox™`
 - 2.1 Rappel de la matrice de transformation homogène convention DH standard
 - 2.2 Rappel de la matrice de transformation homogène convention DH modifié
 - 2.3 Algorithme de calcul utilisant la `Symbolic Math Toolbox™`
 - 2.4 MGD pour Robot 5R
 - 2.4.1 Table DH standard
 - 2.4.2 Table DH modifiée
 - 2.4.3 Expression de (P_x, P_y, P_z) en fonction des angles des articulations et des longueurs des liens
 - 2.4.4 Quelques exemples de position Robot 5R
 - 2.5 MGD pour Robot 4R
 - 2.5.1 Table DH standard
 - 2.5.2 Table DH modifiée
 - 2.5.3 Expression de (P_x, P_y, P_z) en fonction des angles des articulations et des longueurs des liens
 - 2.5.4 Quelques exemples de position Robot 4R
3. Méthode 2 : `Robotic Toolbox™`
 - 3.1 Principale instruction utilisée
 - 3.2 Algorithme de calcul utilisant la `Robotic Toolbox™`.
 - 3.3 MGD pour Robot 5R
 - 3.3.1 Table DH standard
 - 3.3.2 Table DH modifiée
 - 3.3.3 Fonctions: `Revolute`, `RevoluteMDH`, `SerialLink`, `plot`, `fkine`, `teach`.
 - 3.4 MGD pour Robot 4R
 - 3.4.1 Table DH standard
 - 3.4.2 Table DH modifiée

1. Introduction

Le modèle géométrique direct consiste à calculer, à partir des angles des articulations et des longueurs des liens, les coordonnées cartésiennes dans le plan Px, Py et Pz de l'organe effecteur par rapport à la base du robot.

2. Méthode 1 : Symbolic Math Toolbox™

Symbolic Math Toolbox™ fournit des fonctions pour résoudre, simplifier et manipuler des équations mathématiques symboliques. ... Dans ce TP, nous allons utiliser cette bibliothèque pour la simplification des équations trigonométriques et le calcul matriciel.

2.1 Rappel de la matrice de transformation homogène convention DH standard

2.1.1 Définition des coefficients a_i , α_i , d_i et θ_i

a_i : **Link length** : distance de Z_{i-1} à Z_i mesurée par rapport à X_i

α_i : **Link twist** : angle $\widehat{Z_{i-1}, Z_i}$ mesuré par rapport à X_i

d_i : **Link offset** : distance de X_{i-1} à X_i mesurée par rapport à Z_{i-1}

θ_i : **Joint angle** : angle $\widehat{X_{i-1}, X_i}$ mesuré par rapport à Z_{i-1}

2.1.2 Matrice de transformation homogène

La matrice de transformation homogène pour passer d'une articulation à une autre est donnée par :

$${}^{i-1}_i A = \text{trotz}(\theta_i) * \text{transl}(0,0,d_i) * \text{transl}(a_i,0,0) * \text{trotx}(\alpha_i)$$

ou encore

$${}^{i-1}_i A = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) * \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) * \sin(\alpha_i) & a_i * \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) * \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) * \sin(\alpha_i) & a_i * \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Rappel de la matrice de transformation homogène convention DH modifiée

2.2.1 Définition des coefficients a_{i-1} , α_{i-1} , d_i et θ_i

a_{i-1} : **Link length** : distance de Z_{i-1} à Z_i mesurée par rapport à X_{i-1}

α_{i-1} : **Link twist** : angle $\widehat{Z_{i-1}, Z_i}$ mesuré par rapport à X_{i-1}

d_i : **Link offset** : distance de X_{i-1} à X_i mesurée par rapport à Z_i

θ_i : **Joint angle** : angle $\widehat{X_{i-1}, X_i}$ mesuré par rapport à Z_i

2.2.2 Matrice de transformation homogène

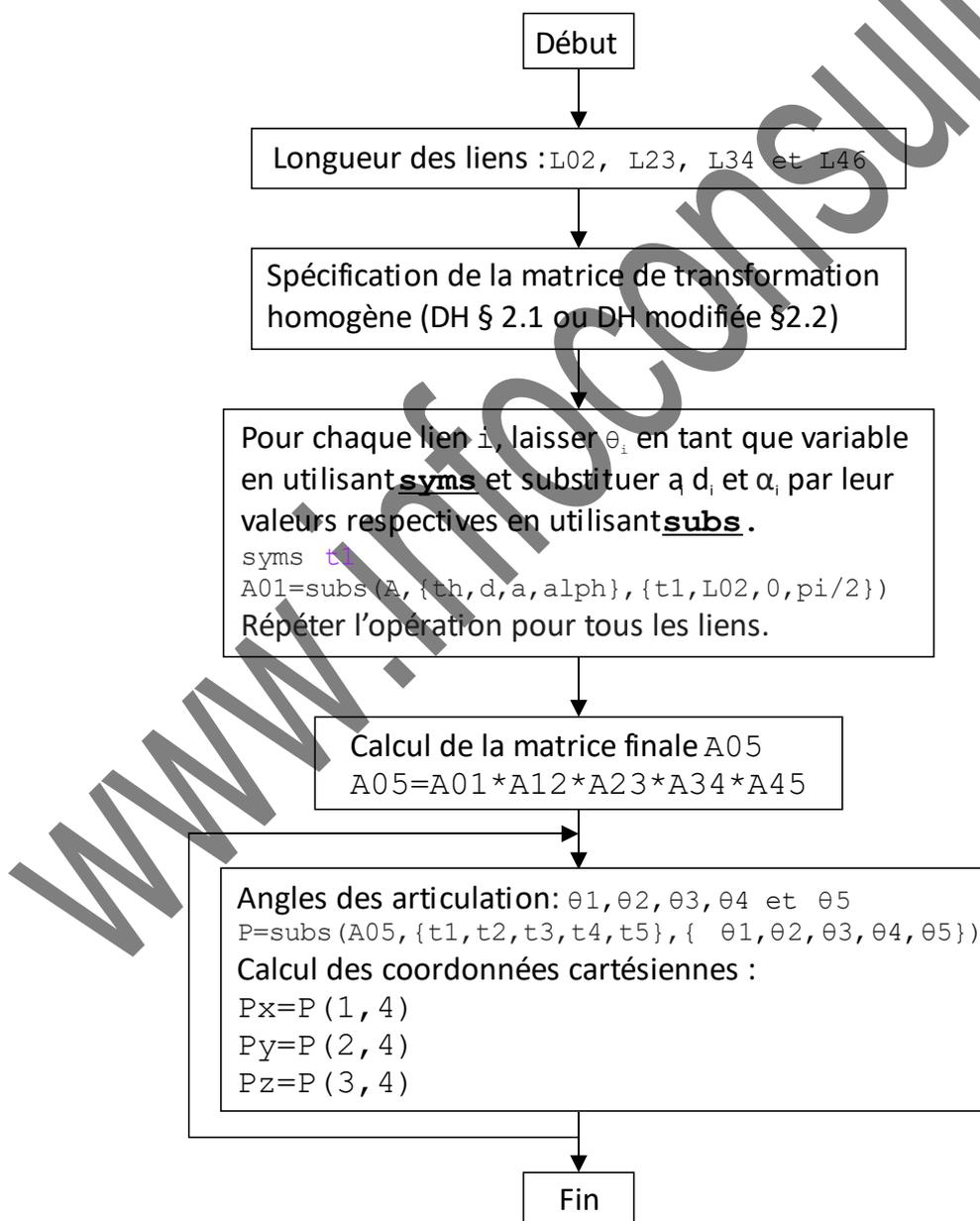
La matrice de transformation homogène pour passer d'une articulation à une autre est donnée par :

$${}^{i-1}_i A_m = \text{trotx}(\alpha_{i-1}) * \text{transl}(a_{i-1}, 0, 0) * \text{troty}(\theta_i) * \text{transl}(0, 0, d_i)$$

ou encore

$${}^{i-1}_i A_m = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \sin(\theta_i) * \cos(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i) * \cos(\alpha_{i-1}) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -d_i * \sin(\alpha_{i-1}) \\ \sin(\theta_i) * \sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i) * \sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1}) & -d_i * \cos(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Algorithme de calcul utilisant la Symbolic Math Toolbox™



2.4 MGD pour Robot 5R

2.4.1 Donner la Table DH standard DH_5R (voir TP1 : modélisation d'un bras manipulateur)

Link	θ_i (X_{i-1}, X_i) / Z_{i-1}	d_i (X_{i-1}, X_i) / Z_{i-1}	a_i (Z_{i-1}, Z_i) / X_i	α_i (Z_{i-1}, Z_i) / X_i
1				
2				
3				
4				
5				

2.4.2 Table DH modifiée DHm_5R (voir TP1 : modélisation d'un bras manipulateur)

Link	θ_i (X_{i-1}, X_i) / Z_{i-1}	d_i (X_{i-1}, X_i) / Z_{i-1}	a_{i-1} (Z_{i-1}, Z_i) / X_i	α_{i-1} (Z_{i-1}, Z_i) / X_i
1				
2				
3				
4				
5				

2.4.3 Expression de (Px,Py,Pz) en fonction des angles des articulations et des longueurs des liens

Si on désigne $d_1 = L_{02}$, $a_2 = L_{23}$, $a_3 = L_{34}$, $d_5 = L_{46}$, écrire un script Matlab en exécutant l'algorithme comme décrit au §2.3 et vérifier que les expressions de Px, Py et Pz sont les suivantes :

$$P_x = -\cos(\theta_1) * (d_5 * \cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) - a_2 * \cos(\theta_2) + a_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_y = -\sin(\theta_1) * (d_5 * \cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) - a_2 * \cos(\theta_2) + a_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_z = d_1 + a_2 * \sin(\theta_2) - d_5 * \sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) + a_3 * \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

2.4.4 Quelques exemples (angle exprimés en degrés)

Remplir le tableau suivant en complétant les valeurs de Px, Py et Pz :

θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	P_x	P_y	P_z	Nature de la position
0	0	0	0				Position de référence
0	90	90	90				Position verticale
0	0	90	90				Bras tendu horizontal
45	45	90	90				Angle 45
45	45	0	180				Zigzag
45	60	12	145				Origine (X,Y) du bras

2.5 MGD pour Robot 4R

2.5.1 Table DH standard DH_4R (voir TP1 : modélisation d'un bras manipulateur)

Link	θ_i (X_{i-1}, X_i) / Z_i	d_i (X_{i-1}, X_i) / Z_i	a_i (Z_{i-1}, Z_i) / X_{i-1}	α_i (Z_{i-1}, Z_i) / Z_{i-1}
1				
2				
3				
4				

2.5.2 Table DH modifiée DHm_4R (voir TP1 : modélisation d'un bras manipulateur)

Link	θ_i (X_{i-1}, X_i) / Z_i	d_i (X_{i-1}, X_i) / Z_i	a_{i-1} (Z_{i-1}, Z_i) / X_{i-1}	α_{i-1} (Z_{i-1}, Z_i) / Z_{i-1}
1				
2				
3				
4				

2.5.3 Expression de (Px,Py,Pz) en fonction des angles des articulations et des longueurs des liens

Si on désigne $d_1 = L_{02} = 108\text{mm}$, $a_2 = L_{23} = 106\text{ mm}$, $d_4 = L_{35} = 204\text{ mm}$, écrire un script Matlab en exécutant l'algorithme comme décrit au §2.3 et vérifier que les expressions de Px, Py et Pz sont les suivantes :

$$P_x = \cos(\theta_1) * (a_2 * \cos(\theta_2) - d_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_y = \sin(\theta_1) * (a_2 * \cos(\theta_2) - d_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_z = d_1 + a_2 * \sin(\theta_2) + d_4 * \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

2.5.4 Quelques exemples de position pour Robot 4R

Remplir le tableau suivant en complétant les valeurs de Px, Py et Pz :

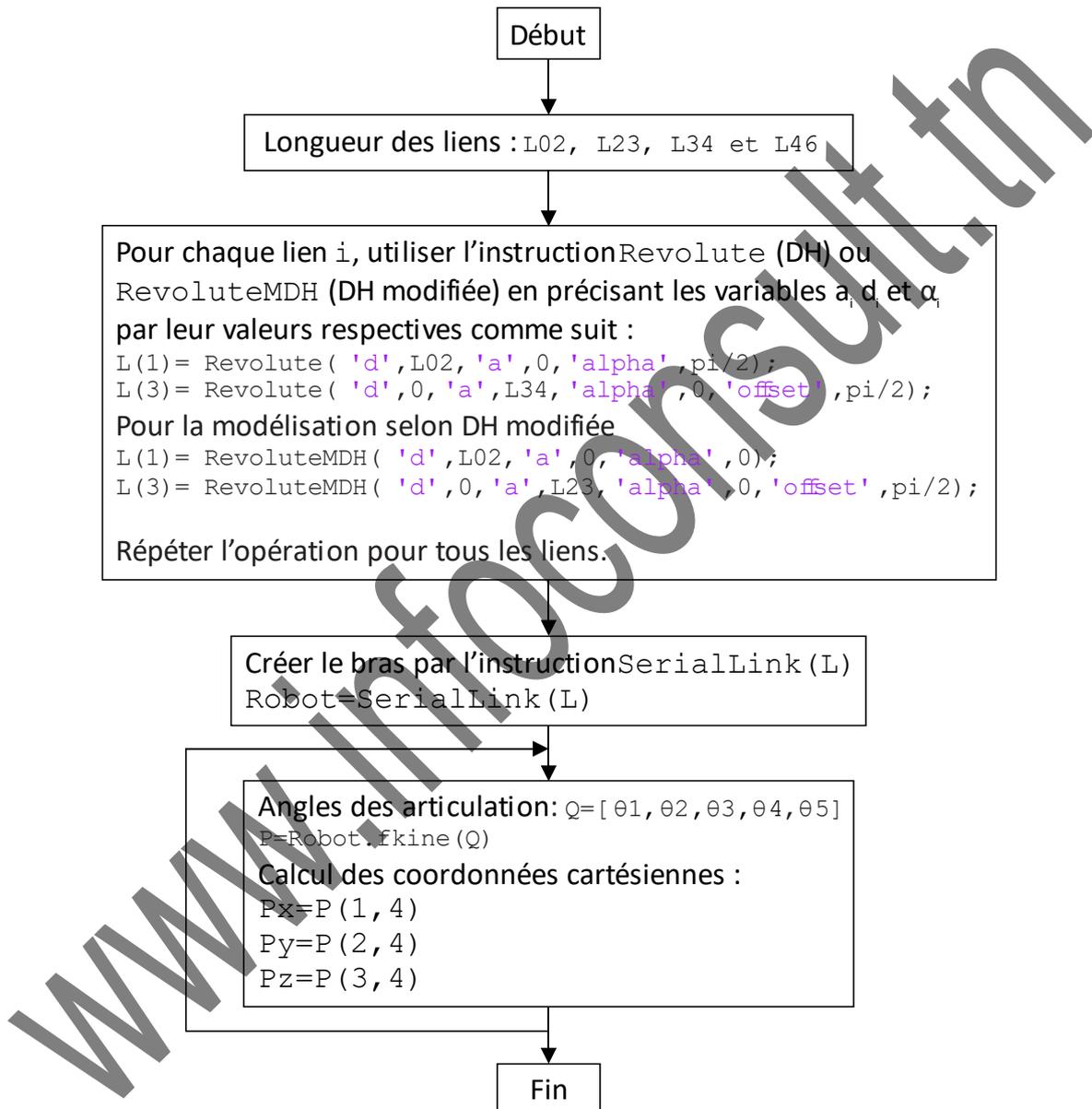
θ_1	θ_2	θ_3	P_x	P_y	P_z	Nature de la position
0	0	0				Position de référence
0	90	90				Position verticale
0	0	90				Bras tendu horizontal
45	131	150				Origine (X,Y) du bras

3. Méthode 2 : Robotic Toolbox™

3.1 Introduction

Bibliothèque développée par Peter CORKE, en libre téléchargement sur son site www.petercorke.com, elle permet de commander le bras aussi bien en MGD qu'en MGI.

3.2 Algorithme de calcul utilisant la Robotic Toolbox™.



3.3 MGD pour Robot 5R

3.3.1 Table DH standard DH_5R (voir TP1 : modélisation d'un bras manipulateur)

Link	θ_i (X_{i-1}, X_i) / Z_{i-1}	d_i (X_{i-1}, X_i) / Z_{i-1}	a_i (Z_{i-1}, Z_i) / X_i	α_i (Z_{i-1}, Z_i) / X_i
1				
2				
3				
4				
5				

3.3.2 Table DH modifiée DHm_5R (voir TP1 : modélisation d'un bras manipulateur)

Link	θ_i (X_{i-1}, X_i) / Z_{i-1}	d_i (X_{i-1}, X_i) / Z_{i-1}	a_{i-1} (Z_{i-1}, Z_i) / X_i	α_{i-1} (Z_{i-1}, Z_i) / X_i
1				
2				
3				
4				
5				

3.3.3 Quelques exemples de position robot 5R

Ecrire un script Matlab en exécutant l'algorithme comme décrit au §3.2 pour remplir le tableau suivant en complétant les valeurs de P_x , P_y et P_z :

θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	P_x	P_y	P_z	Nature de la position
0	0	0	0				Position de référence
0	90	90	90				Position verticale
0	0	90	90				Bras tendu horizontal
45	45	90	90				Angle 45
45	45	0	180				Zigzag
45	60	12	145				Origine (X,Y) du bras

3.4 MGD pour Robot 4R

3.4.1 Table DH standard DH_4R (voir TP1 : modélisation d'un bras manipulateur)

Link	θ_i (X_{i-1}, X_i) / Z_i	d_i (X_{i-1}, X_i) / Z_i	a_i (Z_{i-1}, Z_i) / X_{i-1}	α_i (Z_{i-1}, Z_i) / Z_{i-1}
1				
2				
3				
4				

3.4.2 Table DH modifiée DHm_4R (voir TP1 : modélisation d'un bras manipulateur)

Link	θ_i (X_{i-1}, X_i) / Z_i	d_i (X_{i-1}, X_i) / Z_i	a_{i-1} (Z_{i-1}, Z_i) / X_{i-1}	α_{i-1} (Z_{i-1}, Z_i) / Z_{i-1}
1				
2				
3				
4				

3.4.3 Quelques exemples de position robot 4R

Ecrire un script Matlab en exécutant l'algorithme comme décrit au §3.2 pour remplir le tableau suivant en complétant les valeurs de P_x , P_y et P_z :

θ_1	θ_2	θ_3	P_x	P_y	P_z	Nature de la position
0	0	0				Position de référence
0	90	90				Position verticale
0	0	90				Bras tendu horizontal
45	131	150				Origine (X,Y) du bras