TP 3 : Modèle géométrique inverse (MGI) d'un bras manipulateur

Objectif :
L'objectif de ce TP est l'étude du modèle géométrique inverse de deux Robots bras manipulateur RRRR et RRRRR, après avoir vu leur modélisation (TP1) et leur modèle géométrique direct (TP2).
Le modèle géométrique inverse d'un robot bras manipulateur consiste en la détermination de sa position angulaire (valeur des angles des articulations) à partir de sa position cartésienne (coordonnées cartésiennes de l'effecteur). Deux méthodes vont être étudiées dans ce TP : la méthode algébrique (géométrique) et la méthode analytique.

1. Modèle géométrique inverse pour bras manipulateur RRRR : CAPAX 4R

1.1 Méthode algébrique (géométrique)

Cette méthode nous permet de calculer les expressions suivantes :

$\theta_1 = f(P_x, P_y, P_z)$
$\theta_2 = f(P_x, P_y, P_z)$
$\theta_3 = f(P_x, P_y, P_z)$

où θ_1, θ_2, θ_3, désignent les angles respectifs des articulations 1, 2 et 3
P_x, P_y, P_z : les coordonnées cartésiennes du bras manipulateur.

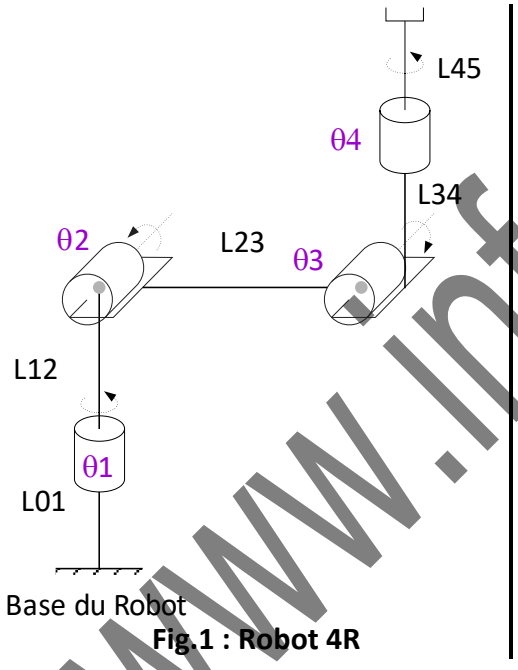

Fig.1 : Robot 4R

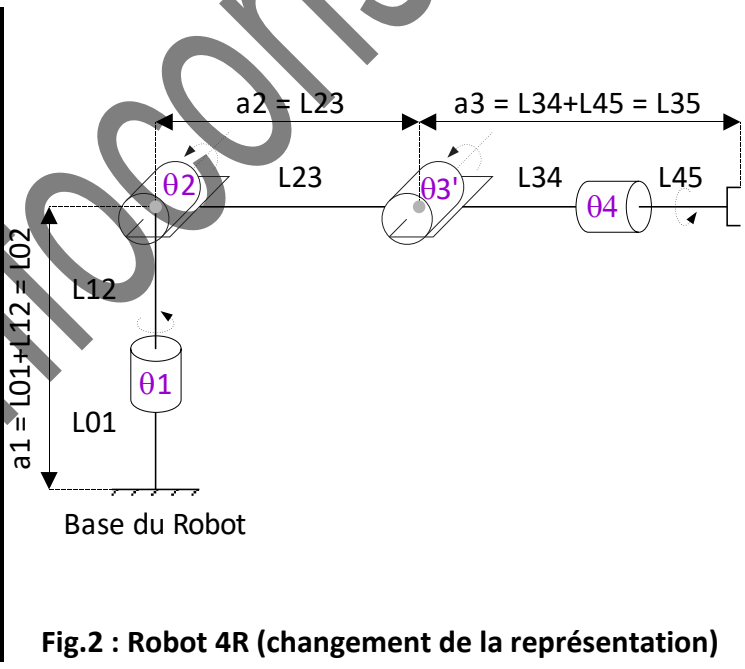

Fig.2 : Robot 4R (changement de la représentation)

La figure 1 montre la modélisation du Robot 4 R. Pour simplifier les calculs dans la méthode algébrique, on va procéder à un léger changement de la représentation et passer à la représentation de la figure 2 en tenant compte que :

$\theta_3 = -\theta_3' + \pi/2$ (1)

Le signe (-) représente le changement du sens de rotation.

www.infoconsult.tn

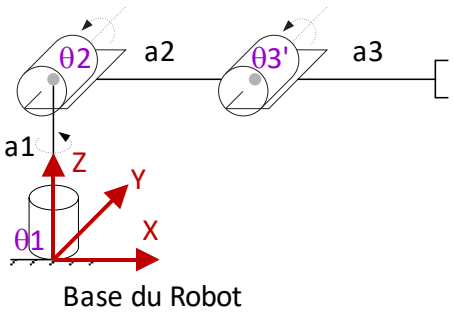

Fig. 3 : Bras simplifiée

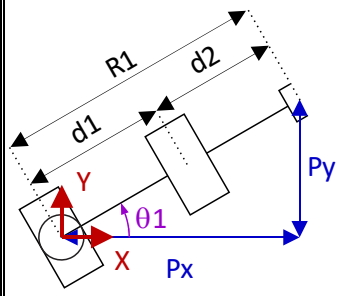

Fig. 4 : Vue de dessus

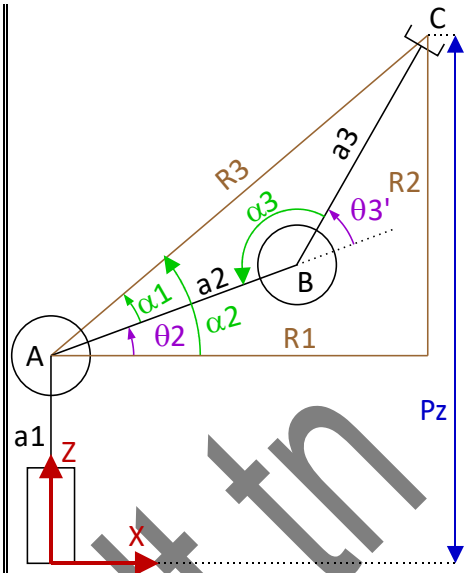

Fig. 5 : Vue de face (coude en bas)

La figure 3 représente le bras simplifié, prêt à l'étude du modèle géométrique inverse par la méthode algébrique.

Figure 4 : vue de dessus

Remarques : d1 ≠ a2 et d2 ≠ a3, parce que $\theta_2 \neq 0$ et $\theta_3 \neq 0$. d1 (d2) est la projection de a2 (a3) sur l'axe des X.

Exprimer θ_1 en fonction de P_x et P_y. (Triangle rectangle R1,Px,Py) ➔ θ_1 = ... (2)

Exprimer R1 en fonction de P_x et P_y. (Triangle rectangle R1,Px,Py) ➔ R1 = ... (3)

Figure 5 : vue de face

R1 ≠ Px, ceci n'est vrai que si $\theta 1 = 0$, ce qui n'est pas toujours le cas.
θ3' n'est pas défini par rapport à l'horizontale, mais plutôt par rapport à la direction du bras a2.

Exprimer R2 en fonction de P_z et a1. ➔ R2 = ... (4)

Exprimer R3 en fonction de R1 et R2 (Triangle rectangle R1,R2,R3) ➔ R3 = ... (5)

En utilisant (3), (4) et (5), exprimer R3 en fonction de P_x, P_y, P_z et a1 ➔ R3 = ... (6)

Exprimer α2 en fonction de R1 et R2 (Triangle rectangle R1,R2,R3) ➔ α2 = ... (7)

Exprimer α1 en fonction de a2, a3 et R3 (Triangle a2,a3,R3) ➔ α1 = ... (8)

Exprimer θ2 en fonction de α2 et α1, ➔ θ2 = ... (9)

En utilisant (7), (8) et (9), exprimer θ2 en fonction de R1, R2, R3, a2 et a3 ➔

θ_2 = ... (10)

www.infoconsult.tn

Exprimer θ'3 en fonction de α3, ➔ θ'3 = ... (11)

Exprimer α3 en fonction de a2, a3 et R3 (triangle a2, a3, R3) ➔

α3 = ... (12)

Exprimer θ'3 en fonction de α3 ➔ θ'3 = ...(13)

En utilisant (1) et (13), exprimer θ3 en fonction de a2, a3 et R3 ➔

θ3 =..... (14)

La figue 6 (vue de face coude en haut) montre la deuxième solution possible pour une autre position du bras avec la même position de l'effecteur (mêmes coordonnées cartésiennes : Px, Py et Pz).
Cette nouvelle position est schématisée en couleur orange.
Elle est matérialisée par le triangle (A, D, C) et les nouveaux angles θ21 et θ31.

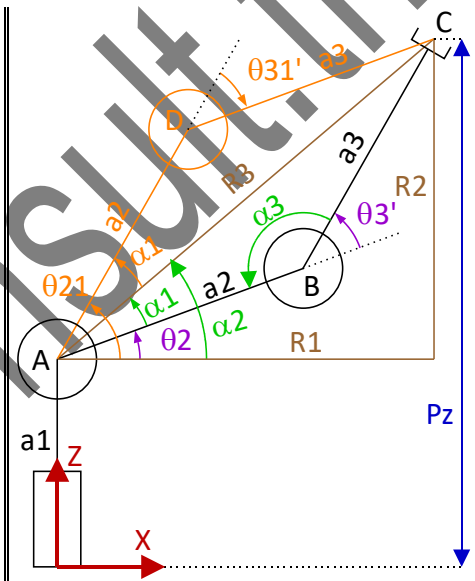

Fig. 6 : vue de face (coude en haut)

En utilisant (1), θ31 = -θ31'+π/2 .....(15)

Exprimer θ21 en fonction de α1 et α2

θ21 = ...(16)

En utilisant (7), (8) et (16), exprimer θ2 en fonction de R1, R2, R3, a2 et a3 ➔

θ21 = ... (16)

θ31' = -θ3' = α3 - π..... (17)

En utilisant (15), (17) et (12), exprimer θ31 en fonction de a2, a3 et R3 ➔

θ31 =..... (18)

A partir de l'expression de θ2 et θ21, en déduire la condition 1 pour que ces 2 valeurs existent :

cond1 = ... (19)

A partir de l'expression de θ3 et θ31, en déduire la condition 2 pour que ces 2 valeurs existent :

cond2 = ... (20)

www.infoconsult.tn

Faites un résumé des valeurs de θ1, θ2 et θ3 dans le tableau ci-dessous

θ1	**θ2**	**θ3**
θ1	θ21	θ31
θ1	θ22	θ32

R1 = ...

R2 = ...

R3 = ...

condition 1 :	**condition 2 :**
. . . . .	. . . . .

Ecrire un script Matlab qui permet de calculer la position angulaire du bras (angles θ1, θ2 et θ3) à partir de sa position cartésienne (Px, Py et Pz) en vous aidant avec l'algorithme de la figure 7.

www.infoconsult.tn

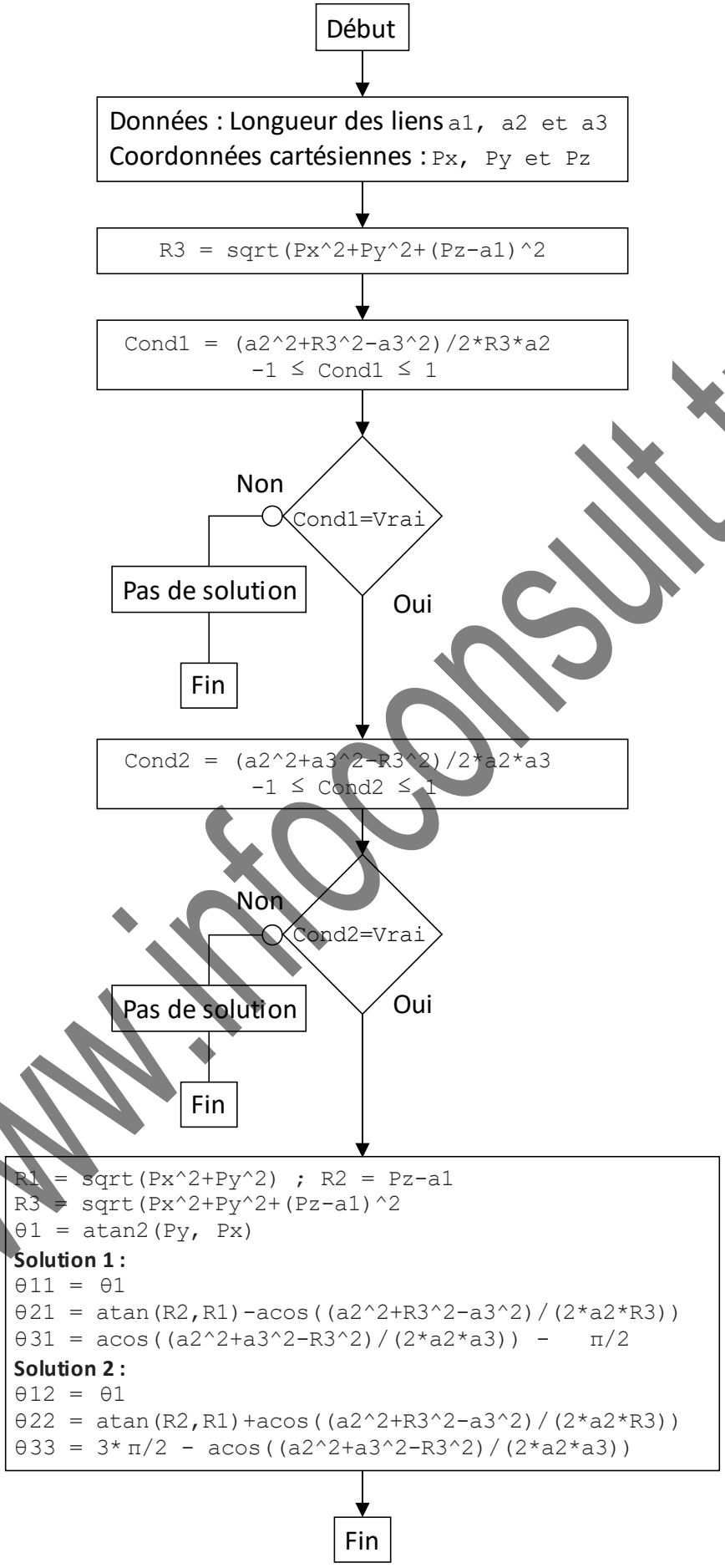

Fig. 7 : Algorithme de calcul par la méthode algébrique

www.infoconsult.tn

1.2 Méthode analytique

Cette méthode exploite l'expression de la matrice homogène pour essayer de simplifier les équations des angles des articulations :

$$ {}^{0}_{4}A = {}^{0}_{1}A(\theta_1) * {}^{1}_{2}A(\theta_2) * {}^{2}_{3}A(\theta_3) * {}^{3}_{4}A(\theta_4) \qquad (1.2\text{-}1) $$

$$ {}^{0}_{4}\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{nx} & \mathrm{ox} & \mathrm{ax} & \mathrm{Px} \\ \mathrm{ny} & \mathrm{oy} & \mathrm{ay} & \mathrm{Py} \\ \mathrm{nz} & \mathrm{oz} & \mathrm{az} & \mathrm{Pz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

`Px, Py et Pz` sont les coordonnées cartésiennes de l'effecteur par rapport à la base du robot.

Si on désigne par :
`cos(θ1) = c1, cos(θ2) = c2, cos(θ3) = c3, cos(θ4) = c4,`
`sin(θ1) = s1, sin(θ2) = s2, sin(θ3) = s3, sin(θ4) = s4.`
`cos(θ2-θ3) = c23 , sin(θ2-θ3) = s23`

`nx = c4*c1*c23-s1*s4`	`ox = -c4*s1-c1*s4*c23`	`ax = -s23*c1`
`ny = c1*s4+c4*s1*c23`	`oy = c1*c4-s1*s4*c23`	`ay = -s23*s1`
`nz = s23*c4`	`oz = -s23*s4`	`az = c23`
`Px=c1*(a2*c2-d4*s23)`	`Py=c1*(a2*c2-d4*s23)`	`Pz = d1+a2*s2+d4*c23`

En multipliant les 2 termes de l'équation `(1.2-1)` par $({}^{0}_{1}A(\theta_1))^{-1}$, l'équation devient :

$$ ({}^{0}_{1}A(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{4}A = ({}^{0}_{1}A(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{1}A(\theta_1) * {}^{1}_{2}A(\theta_2) * {}^{2}_{3}A(\theta_3) * {}^{3}_{4}A(\theta_4) \qquad (1.2\text{-}2) $$

Puisque $({}^{0}_{1}A(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{1}A(\theta_1) = \mathrm{I}$: matrice identité
L'équation `(1.2-2)` devient :

$$ ({}^{0}_{1}A(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{4}A = {}^{1}_{2}A(\theta_2) * {}^{2}_{3}A(\theta_3) * {}^{3}_{4}A(\theta_4) \qquad (1.2\text{-}3) $$

On aura le système d'équation suivant :

$$ \begin{cases} \mathtt{Px*cos(\theta1)+Py*sin(\theta1) = a2*cos(\theta2)-d4*sin(\theta2-\theta3)} & (1.2\text{-}4) \\ \mathtt{Pz-d1 = a2*sin(\theta2)+d4*cos(\theta2-\theta3)} & (1.2\text{-}5) \\ \mathtt{Px*sin(\theta1)-Py*cos(\theta1) = 0} & (1.2\text{-}6) \end{cases} $$

A partir de (1.2-6), exprimer θ1 en fonction de Px et Py ➔

θ1 = (1.2-7)

www.infoconsult.tn

θ1 étant connu, on pose :

$$u = Px*\cos(\theta1)+Py*\sin(\theta1) \quad \textbf{(1.2-8)}$$
$$v = Pz-d1 \quad \textbf{(1.2-9)}$$

Le système d'équation devient :

$$\begin{cases} u = a2*\cos(\theta2)-d4*\sin(\theta2-\theta3) & (1.2\text{-}10) \\ v = a2*\sin(\theta2)+d4*\cos(\theta2-\theta3) & (1.2\text{-}11) \end{cases}$$

En exploitant la propriété des fonctions trigonométriques (voir annexe 1),
Calculer puis simplifier l'expression : $(1.2\text{-}10)^2+(1.2\text{-}11)^2$
En déduire l'expression de sin(θ3) en fonction de u, v, a2 et d4 ➔

sin(θ3) = (1.2-12)

On pose
$w1= u^2+v^2-a2^2-d4^2/2*a2*d4$
Comme $0 \leq \theta3 \leq \pi$ ➔ $\theta3 \geq 0$ ➔ $0 \leq \sin(\theta3) \leq 1$

Définir une condition sur w1 qui vérifie l'inégalité ci-dessus

Condition 1 : (1.2-13)
Dans ce cas
Exprimer cos(θ3) en fonction de w1 ➔
cos(θ3) = (1.2-14)

Déterminer alors les 2 valeurs possibles de θ3 en fonction de w1 : θ31 et θ32 ➔
θ31 = (1.2-15)
θ31 = (1.2-16)

2ème transformation :

En multipliant les 2 termes de l'équation (1.2-3) par $({}^2_1A(\theta_1))^{-1}$, on aura :

$$({}^1_2A(\theta_1))^{-1} * ({}^0_1A(\theta_1))^{-1} * {}^0_4A = ({}^1_2A(\theta_1))^{-1} * {}^1_2A(\theta_2) * {}^2_3A(\theta_3) * {}^3_4A(\theta_4) \quad (1.2\text{-}17)$$

Puisque $({}^1_2A(\theta_1))^{-1} * {}^1_2A(\theta_1) = \mathrm{I}$: matrice identité
L'équation (1.2-17) devient

$$({}^1_2A(\theta_1))^{-1} * ({}^0_1A(\theta_1))^{-1} * {}^0_4A = {}^2_3A(\theta_3) * {}^3_4A(\theta_4) \quad (1.2\text{-}18)$$

Après identification des termes, on aura le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} v*\sin(\theta2)+u*\cos(\theta2)=d4*\sin(\theta3)+a2 & (1.2\text{-}19) \\ v*\cos(\theta2)-u*\sin(\theta2)=d4*\cos(\theta3) & (1.2\text{-}20) \end{cases}$$

u et v étant définit précédemment.
θ3 étant calculée précédemment en θ31 et θ32

www.infoconsult.tn

On pose

$w21 = d4*\sin(\theta 31)+a2$ (1.2-21)

$w22 = d4*\sin(\theta 32)+a2$ (1.2-22)

(1.2-19) et (1.2-21) ➔ $u*\cos(\theta 2)+v*\sin(\theta 2) = w21$ (1.2-23)

(1.2-19) et (1.2-22) ➔ $u*\cos(\theta 2)+v*\sin(\theta 2) = w22$ (1.2-24)

Pour la résolution de ce type d'équation, se référer à l'annexe 1 (équation de type 6) dont la démonstration est comme suit :

on pose :

$u = R*\cos(q)$ (1.2-25)

$v = R*\sin(q)$ (1.2-26)

avec :

$R = \text{sqrt}(u^2+v^2)$ (1.2-27)

$q = \text{atan2}(v,u)$ (1.2-28)

(1.2-23), (1.2-25) et (1.2-26) ➔

$\cos(q)*\cos(\theta 21)+\sin(q)*\sin(\theta 21) = w21/R$ (1.2-29)

L'équation ci-dessus est de la forme $\cos(A1-B1)=w21/R$

Identifier $A1$ et $B1$?

$A1 =$ ..... (1.2-30)

$B1 =$ ..... (1.2-31)

En déduire la valeur de $\theta 21$ et la condition y afférente.

$\theta 21 =$ .....

condition2 ➔ .....

et, de la même manière

(1.2-24), (1.2-25) et (1.2-26) ➔

$\cos(q)*\cos(\theta 22)+\sin(q)*\sin(\theta 22) = w22/R$

L'équation ci-dessus est de la forme $\cos(A2-B2)=w22/R$

Identifier $A2$ et $B2$?

$A2 =$ ..... (1.2-32)

$B2 =$ ..... (1.2-33)

En déduire la valeur de $\theta 22$ et la condition y afférente.

$\theta 22 =$ .....

condition3 ➔ .....

www.infoconsult.tn

Faites un résumé des valeurs de θ1, θ2 et θ3 dans le tableau ci-dessous

θ1	**θ2**	**θ3**
θ1	θ21	θ31 . . . . .
θ1	θ22	θ32 . . . . .
u = Px*cos(θ1)+Py*sin(θ1) ; v = Pz-d1 ; R = sqrt(u^2+v^2) w1 = (u^2+v^2-$a2^2$-$d4^2$)/2*a2*d4 ; w21 = d4*sin(θ31)+a2 ; w22 = d4*sin(θ32)+a2		
Condition 1 :	**Condition 2 :**	**Condition 3 :** . . . . .

Ecrire un script Matlab qui permet de calculer la position angulaire du bras (angles θ1, θ2 et θ3) à partir de sa position cartésienne (Px, Py et Pz) en vous aidant avec l'algorithme de la figure 8.

www.infoconsult.tn

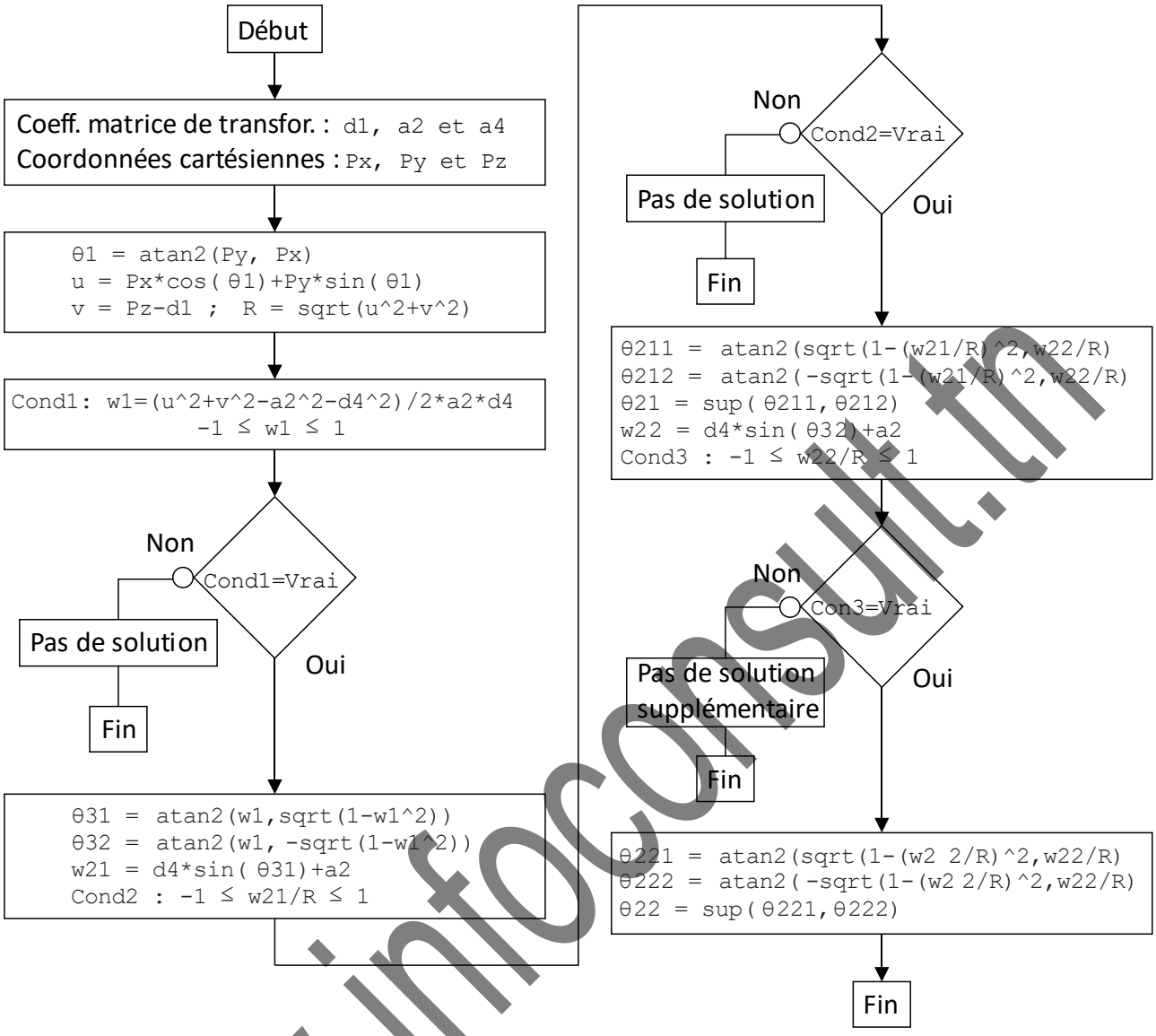

Fig. 8 : Algorithme de calcul par la méthode analytique

www.infoconsult.tn

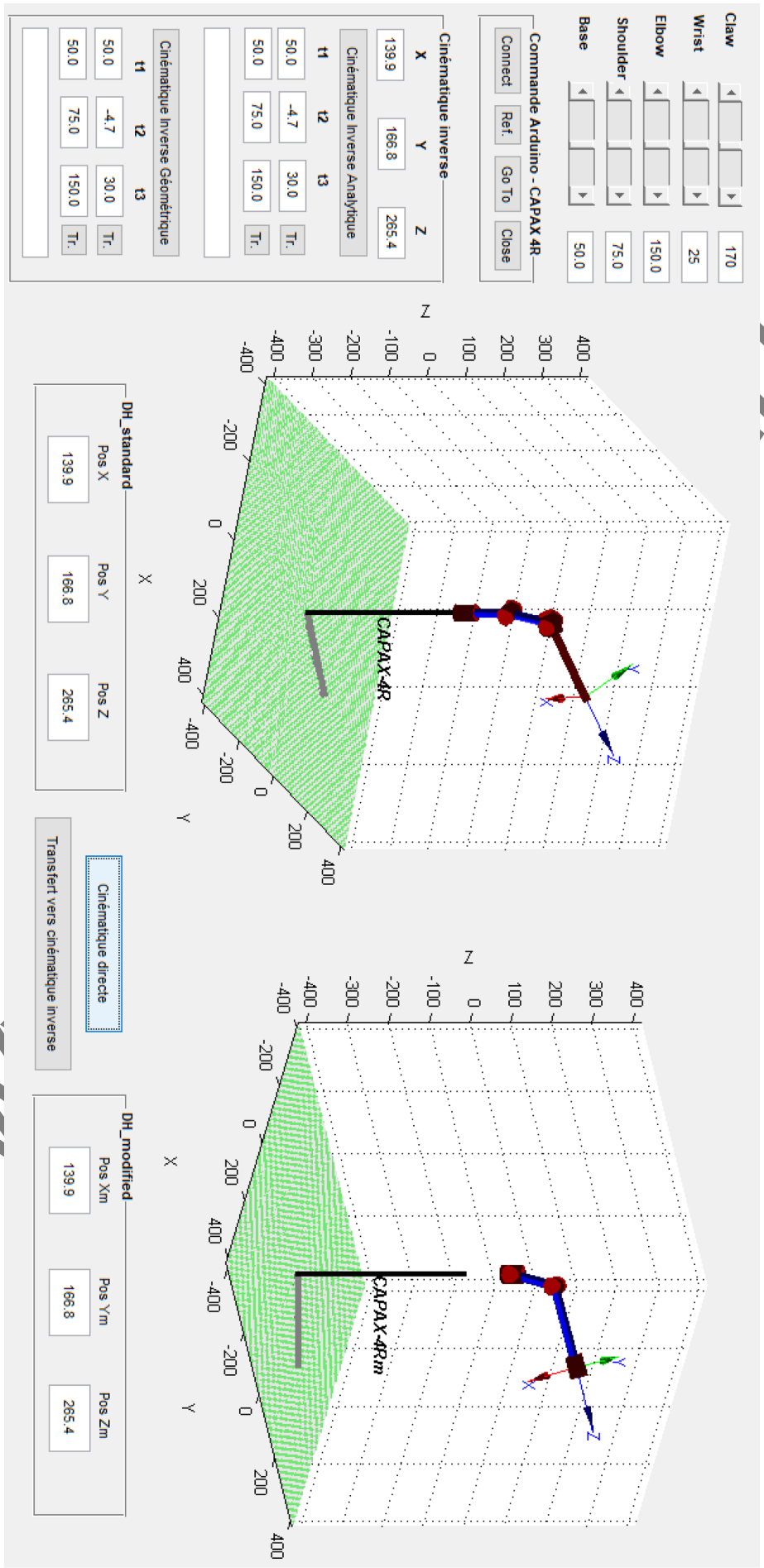

Fig. 9 : Interface Matlab Robot 4R

2. Modèle géométrique inverse pour bras manipulateur RRRRR : CAPAX 5R

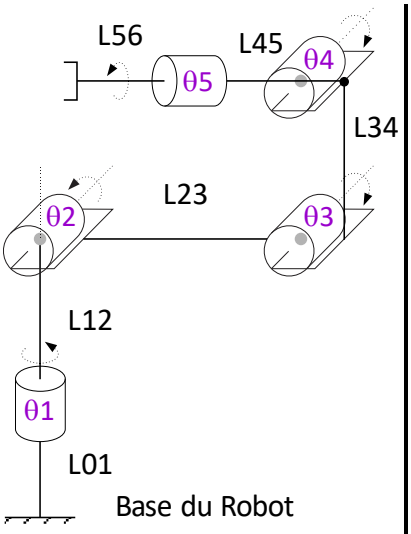

Fig. 10 : Robot 5R

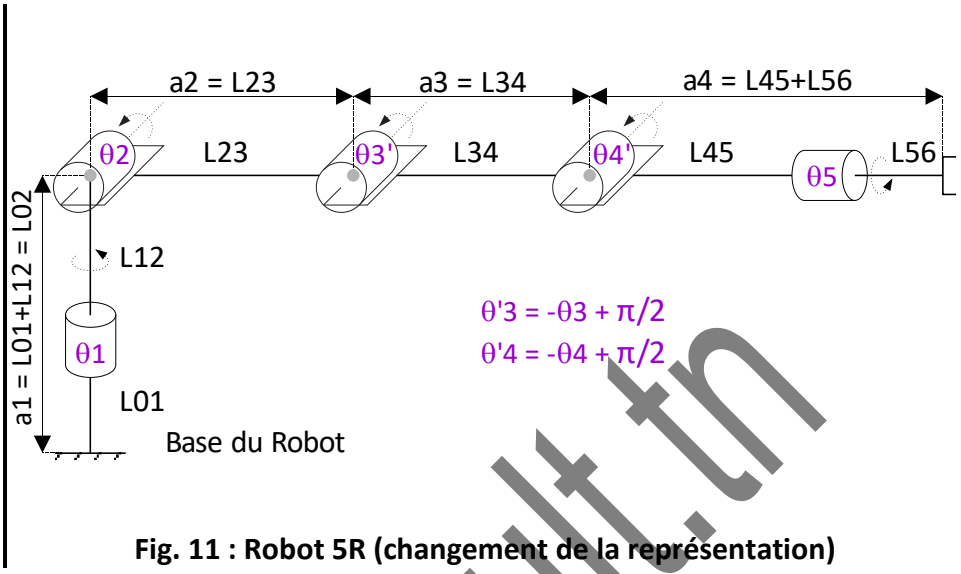

Fig. 11 : Robot 5R (changement de la représentation)

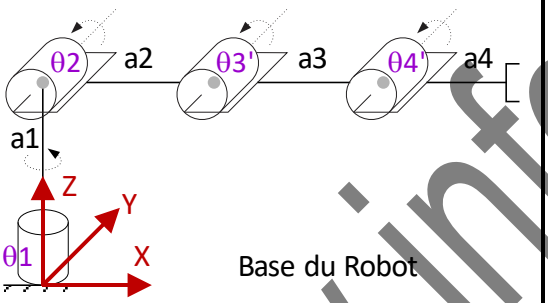

Fig. 12 : Robot 5R (représentation simplifiée)

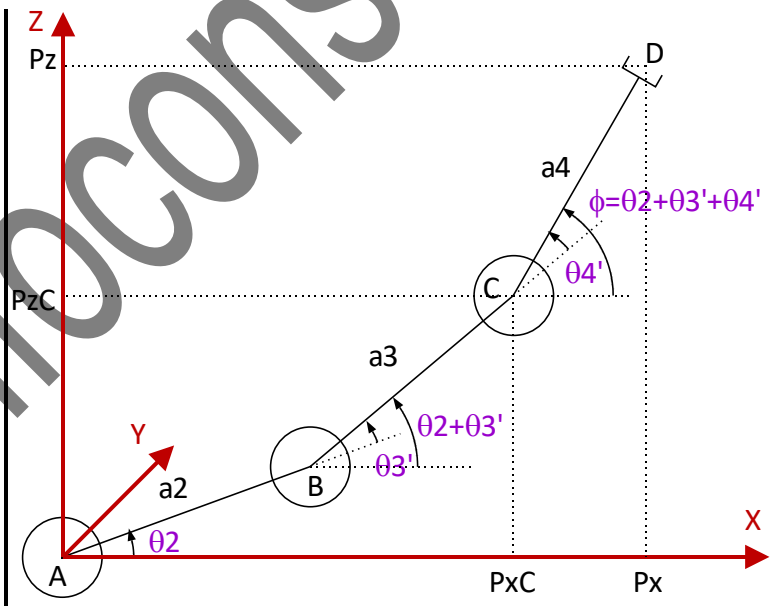

Fig. 13 : Robot 5 R approche géométrique

2.1 Méthode algébrique (géométrique) avec condition ($\phi = \theta_2 + \theta_3' + \theta_4'$)

Cette méthode nous permet de calculer les expressions suivantes :

$\theta_1 = f(P_x, P_y, P_z)$
$\theta_2 = f(P_x, P_y, P_z)$
$\theta_3 = f(P_x, P_y, P_z)$
$\theta_4 = f(P_x, P_y, P_z)$

où θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 désignent les angles respectifs des articulations 1, 2, 3 et 4.
P_x, P_y, P_z : les coordonnées cartésiennes du bras manipulateur.

www.infoconsult.tn

C'est un système d'équation qui admet plusieurs solutions puisque le nombre d'inconnues θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 dépassent le nombre des données P_x, P_y, P_z. Pour contrecarrer ce problème, on va ajouter une quatrième condition par exemple, on pose $\phi = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$.

Px, Py et Pz sont connues. Si on détermine PxC, PyC et PzC, (Fig. 13), on peut ramener le robot 5R en un robot 4R et lui appliquer les formules vues au §1.1.
Dans ce cas, on peut calculer θ2 et θ3. θ4 sera calculé à partir de l'équation θ4 = ϕ - θ2 - θ3
On pose : θ'3=−θ3+π/2, θ'4 = −θ4+π/2
Puisqu'on travaille dans l'espace 3D, on va utiliser l'étude analytique juste pour déterminer PxC, PyC et PzC.
Soit C : matrice de transformation homogène au point C

$$ {}^0_5A = {}^0_1A(\theta_1) * {}^1_2A(\theta_2) * {}^2_3A(\theta'_3) * {}^3_4A(\theta'_4) * {}^4_5A(\theta_5) $$
$$ C = {}^0_3A = {}^0_1A(\theta_1) * {}^1_2A(\theta_2) * {}^2_3A(\theta'_3) $$

$$ {}^0_5A = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & Px \\ ny & oy & ay & Py \\ nz & oz & az & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad {}^0_3A = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & PxC \\ ny & oy & ay & PyC \\ nz & oz & az & PzC \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Après identification, on trouve :
Px = PxC + a4*cos(θ1)*cos(ϕ) ➔ PxC = Px−a4*cos(θ1)*cos(ϕ)
Py = PyC + a4*sin(θ1)*cos(ϕ) ➔ PyC = Py−a4*sin(θ1)*cos(ϕ)
Pz = PzC + a4*sin(ϕ) ➔ PzC = Pz−a4*sin(ϕ)

2.1.1 Première solution : coude en bas

Pour le calcul de θ2 et θ'3, on exploitera les résultats déjà calculés au §1.1 (méthode algébrique pour Robot 4R), en remplaçant (Px, Py, Pz) par (PxC, PyC, PzC).
Puisque ϕ = θ2 + θ'3 + θ'4 ➔ θ'4=ϕ−θ2−θ'3.
avec :
$\theta_3 = -\theta_3' + \pi/2$ (2.1-1)
$\theta_4 = -\theta_4' + \pi/2$ (2.1-2)
Le signe (-) représente le changement du sens de rotation.

www.infoconsult.tn

En procédant de la sorte, le schéma du bras, ramené au point C devient :

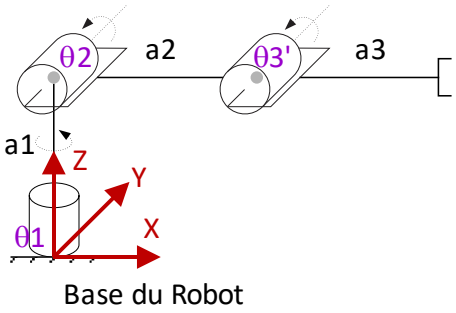

Fig. 14 : Bras simplifiée ramené au point C

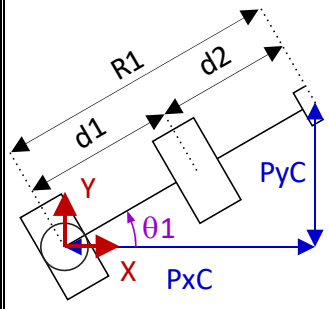

Fig. 15 : Vue de dessus

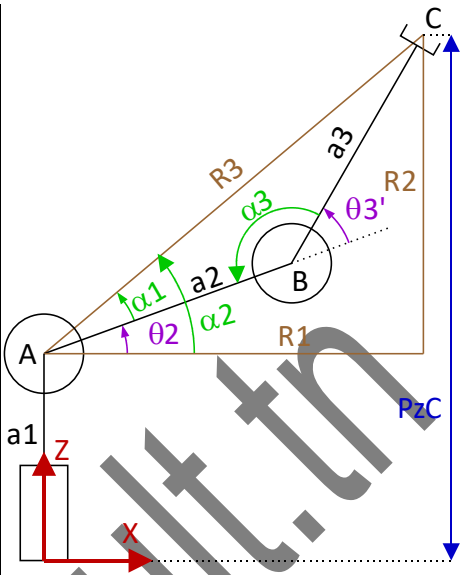

Fig. 16 : Vue de face (coude en bas)

Figure 15 : vue de dessus

Remarques : `d1 ≠ a2` et `d2 ≠ a3`, parce que $\theta_2 \neq 0$ et $\theta_3 \neq 0$. `d1 (d2)` est la projection de `a2 (a3)` sur l'axe des X.

Exprimer θ_1 en fonction de PxC et PyC. (Triangle rectangle R1,PxC,PyC) ➔

θ_1 = ... (2.1-3)

Exprimer R1 en fonction de PxC et PyC. (Triangle rectangle R1,PxC,PyC) ➔

R1 = ... (2.1-4)

Figure 16 : vue de face

`R1 ≠ PxC`, ceci n'est vrai que si `θ1 = 0`, ce qui n'est pas toujours le cas.
`θ3'` n'est pas défini par rapport à l'horizontale, mais plutôt par rapport à la direction du bras `a2`.

Exprimer R2 en fonction de PzC et a1. ➔ R2 = ... (2.1-5)

Exprimer R3 en fonction de R1 et R2 (Triangle rectangle R1,R2,R3) ➔

R3 = ... (2.1-6)

En utilisant (3), (4) et (5), exprimer R3 en fonction de PxC, PyC, PzC et a1 ➔

R3 = ... (2.1-7)

www.infoconsult.tn

Exprimer α2 en fonction de R1 et R2 (Triangle rectangle R1,R2,R3) ➔

α2 = ... (2.1-8)

Exprimer α1 en fonction de a2, a3 et R3 (Triangle a2,a3,R3) ➔

α1 = ... (2.1-9)

Exprimer θ2 en fonction de α2 et α1, ➔ θ2 = ... (2.1-10)

En utilisant (2.1-8), (2.1-9) et (2.1-10), exprimer θ2 en fonction de R1, R2, R3, a2 et a3 ➔

θ2 = ... (2.1-11)

Exprimer θ'3 en fonction de α3, ➔ θ'3 = ... (2.1-12)

Exprimer α3 en fonction de a2, a3 et R3 (triangle a2, a3, R3) ➔

α3 = ... (2.1-13)

Exprimer θ'3 en fonction de α3 ➔ θ'3 = ... (2.1-14)

En utilisant (2.1-2) et (2.1-14), exprimer θ3 en fonction de a2, a3 et R3 ➔

θ3 =..... (2.1-15)

La figue 6 (vue de face coude en haut) montre la deuxième solution possible pour une autre position du bras avec la même position de l'effecteur (mêmes coordonnées cartésiennes : PxC, PyC et PzC).
Cette nouvelle position est schématisée en couleur orange. Elle est matérialisée par le triangle (A, D, C) et les nouveaux angles θ21 et θ31.

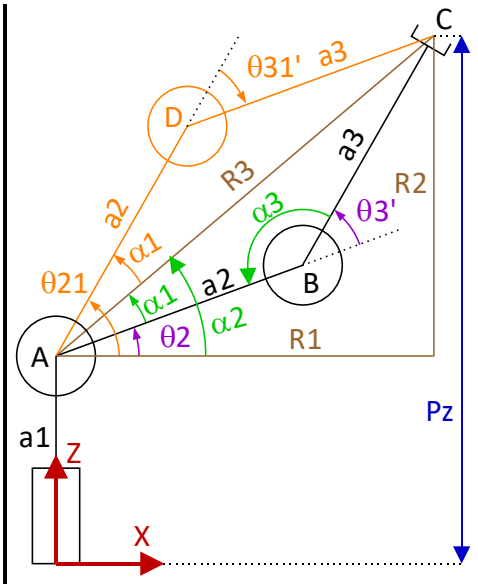

Fig. 6 : vue de face (coude en haut)

En utilisant (2.1-2), θ31 = −θ31'+π/2 ..... (2.1-16)
Exprimer θ21 en fonction de α1 et α2

θ21 = ... (2.1-17)

www.infoconsult.tn

En utilisant (2.1-8), (2.1-9) et (2.1-17), exprimer θ2 en fonction de R1, R2, R3, a2 et a3 ➔

θ21 = ... (2.1-17)

θ31' = -θ3' = α3 - π (2.1-18)

En utilisant (2.1-13), (2.1-16) et (2.1-18), exprimer θ31 en fonction de a2, a3 et R3 ➔

θ31 =..... (2.1-19)

A partir de l'expression de θ21 et θ22, en déduire la condition 1 pour que ces 2 valeurs existent :

cond1 = ... (2.1-20)

A partir de l'expression de θ31 et θ32, en déduire la condition 2 pour que ces 2 valeurs existent :

cond2 = ... (2.1-21)

Faites un résumé des valeurs de θ1, θ2, θ3 et θ4 dans le tableau ci-dessous

Solution 1	**θ1 =** ..... **θ21 =** ..... **θ31 =** ..... **θ41 =** .....
Solution 2	**θ1 =** ..... **θ21 =** ..... **θ31 =** ..... **θ41 =** .....
R1 = ... **R2 =** ..... **R3 =**	
condition 1 :	**condition 2 :** .....

Ecrire un script Matlab qui permet de calculer la position angulaire du bras (angles θ1, θ2, θ3 et θ4) à partir de sa position cartésienne (PxC, PyC et PzC) et la somme des angles ϕ en vous aidant avec l'algorithme de la figure 7.

www.infoconsult.tn

2.2 Méthode analytique : Méthode de Paul

Cette méthode exploite l'expression de la matrice homogène pour essayer de simplifier les équations des angles des articulations :

$$ {}^{0}_{5}\mathrm{A} = {}^{0}_{1}\mathrm{A}(\theta_1) * {}^{1}_{2}\mathrm{A}(\theta_2) * {}^{2}_{3}\mathrm{A}(\theta_3) * {}^{3}_{4}\mathrm{A}(\theta_4) * {}^{4}_{5}\mathrm{A}(\theta_5) \qquad (2.2\text{-}1) $$

$$ {}^{0}_{5}\mathrm{A} = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & Px \\ ny & oy & ay & Py \\ nz & oz & az & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

si on pose :
cos(θ1)=c1, cos(θ2)=c2, cos(θ3)=c3, cos(θ4)=c4, cos(θ5)=c5
sin(θ1)=s1, sin(θ2)=s2, sin(θ3)=s3, sin(θ4)=s4, sin(θ5)=s5
cos(θ2-θ3)=c23 ,sin(θ2-θ3)=s23
cos(θ2-θ3-θ4)=c234 ,sin(θ2-θ3-θ4)=s234

$$ {}^{0}_{5}\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -c5*c1*s234 - s1*s5 & s5*c1*s234 - c5*s1 & -c1*c234 & c1*(a2*c2 - a3*s23 - d5*c234) \\ c1*s5 - c5*s1*s234 & c1*c5 + s5*s1*s234 & -s1*c234 & s1*(a2*c2 - a3*s23 - d5*c234) \\ c234*c5 & s5*c234 & -s234 & d1 + a2*s2 + a3*c23 - d5*s234 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

On pose :

$$ {}^{0}_{5}\mathrm{A}\,(1,4) = \mathrm{Px} \quad , \quad {}^{0}_{5}\mathrm{A}\,(2,4) = \mathrm{Py} \quad , \quad {}^{0}_{5}\mathrm{A}\,(3,4) = \mathrm{Pz} $$

Alors :

$$ {}^{0}_{5}\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -c5*c1*s234 - s1*s5 & s5*c1*s234 - c5*s1 & -c1*c234 & Px \\ c1*s5 - c5*s1*s234 & c1*c5 + s5*s1*s234 & -s1*c234 & Py \\ c234*c5 & s5*c234 & -s234 & Pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

En multipliant les 2 termes de l'équation (2.2-1) par $({}^{0}_{1}A(\theta_1))^{-1}$, elle devient :

$$ ({}^{0}_{1}\mathrm{A}(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{5}\mathrm{A} = ({}^{0}_{1}\mathrm{A}(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{1}\mathrm{A}(\theta_1) * {}^{1}_{2}\mathrm{A}(\theta_2) * {}^{2}_{3}\mathrm{A}(\theta_3) * {}^{3}_{4}\mathrm{A}(\theta_4) * {}^{4}_{5}\mathrm{A}(\theta_5) \qquad (2.2\text{-}2) $$

Puisque $({}^{0}_{1}\mathrm{A}(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{1}\mathrm{A}(\theta_1) = \mathrm{I}$: matrice identité
L'équation (2.2-2) devient :

$$ ({}^{0}_{1}A(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{5}A = {}^{1}_{2}A(\theta_2) * {}^{2}_{3}\mathrm{A}(\theta_3) * {}^{3}_{4}\mathrm{A}(\theta_4) * {}^{4}_{5}\mathrm{A}(\theta_5) \qquad (2.2\text{-}3) $$

En multipliant les 2 termes de l'équation (2.2-3) par $({}^{1}_{2}A(\theta_2))^{-1}$, elle devient :

$$ ({}^{1}_{2}A(\theta_2))^{-1} * ({}^{0}_{1}A(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{5}A = ({}^{1}_{2}A(\theta_2))^{-1} * {}^{1}_{2}A(\theta_2) * {}^{2}_{3}\mathrm{A}(\theta_3) * {}^{3}_{4}\mathrm{A}(\theta_4) * {}^{4}_{5}\mathrm{A}(\theta_5) \qquad (2.2\text{-}4) $$

Puisque $({}^{1}_{2}\mathrm{A}(\theta_2))^{-1} * {}^{1}_{2}\mathrm{A}(\theta_2) = \mathrm{I}$: matrice identité
L'équation (2.2-7) devient :

$$ ({}^{1}_{2}A(\theta_2))^{-1} * ({}^{0}_{1}A(\theta_1))^{-1} * {}^{0}_{5}A = {}^{2}_{3}\mathrm{A}(\theta_3) * {}^{3}_{4}\mathrm{A}(\theta_4) * {}^{4}_{5}\mathrm{A}(\theta_5) \qquad (2.2\text{-}5) $$

www.infoconsult.tn

On aura le système d'équation suivant : (2.2-S1)

$$\begin{cases} v*\sin(\theta2)+u*\cos(\theta2)-a2 = a3*\sin(\theta3)-d5*\cos(\theta3+\theta4) & (2.2\text{-}6)\\ v*\cos(\theta2)-u*\sin(\theta2) = a3*\cos(\theta3)+d5*\sin(\theta3+\theta4) & (2.2\text{-}7)\\ Px*\sin(\theta1)-Py*\cos(\theta1) = 0 & (2.2\text{-}8) \end{cases}$$

Avec

$$u = Px*\cos(\theta1)+Py*\sin(\theta1) \quad (2.2\text{-}9)$$
$$v = Pz-d1 \quad (2.2\text{-}10)$$

En multipliant les 2 termes de l'équation (2.2-5) par $({}^2_3A(\theta_3))^{-1}$, elle devient :

$$({}^2_3A(\theta_3))^{-1} * ({}^1_2A(\theta_2))^{-1} * ({}^0_1A(\theta_1))^{-1} * {}^0_5A = ({}^2_3A(\theta_3))^{-1} * {}^2_3A(\theta_3) * {}^3_4A(\theta_4) * {}^4_5A(\theta_5) \quad (2.2\text{-}11)$$

Puisque $({}^2_3A(\theta_3))^{-1} * {}^2_3A(\theta_3) = I$: matrice identité
L'équation (2.2-11) devient :

$$({}^2_3A(\theta_3))^{-1} * ({}^1_2A(\theta_2))^{-1} * ({}^0_1A(\theta_1))^{-1} * {}^0_5A = {}^3_4A(\theta_4) * {}^4_5A(\theta_5) \quad (2.2\text{-}12)$$

On aura le système d'équation suivant : (2.2-S2)

$$\begin{cases} v*\cos(\theta2-\theta3)-u*\sin(\theta2-\theta3)-a2*\sin(\theta3)-a3 = d5*\sin(\theta4) & (2.2\text{-}13)\\ v*\sin(\theta2-\theta3)+u*\cos(\theta2-\theta3)-a2*\cos(\theta3) = -d5*\cos(\theta4) & (2.2\text{-}14)\\ Px*\sin(\theta1)-Py*\cos(\theta1) = 0 & (2.2\text{-}15) \end{cases}$$

u et v ont été spécifiées précédemment.

2.3 Méthode analytique : calcul de θ_1

A partir du système d'équation (2.2-S1)

$$(2.2\text{-}8) \rightarrow \theta1 = \text{atan2}(Py,Px) \quad (2.3\text{-}1)$$

θ1 étant connue, les expressions de u(2.2-9) et v(2.2-10) le deviennent aussi.

www.infoconsult.tn

2.4 Méthode analytique avec condition : θ_2 connue, θ_3 et θ_4 inconnues

2.4.1 Calcul de θ_3

A partir du système d'équation (2.2-S1)

$$\begin{cases} v*\sin(\theta2)+u*\cos(\theta2)-a2 = a3*\sin(\theta3)-d5*\cos(\theta3+\theta4) & (2.2\text{-}6) \\ v*\cos(\theta2)-u*\sin(\theta2) = a3*\cos(\theta3)+d5*\sin(\theta3+\theta4) & (2.2\text{-}7) \end{cases}$$

On pose :

$At2= v*\sin(\theta2)+u*\cos(\theta2)-a2 \ , \ Bt2=-v*\cos(\theta2)+u*\sin(\theta2)$

Le système devient :

$$\begin{cases} a3*\sin(\theta3)-d5*\cos(\theta3+\theta4) = At2 & (2.4\text{-}1) \\ -a3*\cos(\theta3)-d5*\sin(\theta3+\theta4) = Bt2 \quad (P2\text{-}2) & (2.4\text{-}2) \end{cases}$$

$(2.4\text{-}1)^2+(2.4\text{-}2)^2 \rightarrow$

$a3^2 + 2*\sin(\theta4)*a3*d5 + d5^2 = At2^2+Bt2^2$

$\sin(\theta4) = (At2^2+Bt2^2-a3^2-d5^2)/2*a3*d5$

$0 <= Cond1=(At2^2+Bt2^2-a3^2-d5^2)/2*a3*d5 <= 1 \quad (2.4\text{-}3)$

$\theta41=\text{asind}((At2^2+Bt2^2-a3^2-d5^2)/2*a3*d5) \quad (2.4\text{-}4)$

$\theta42=180- \theta41 \quad (2.4\text{-}5)$

2.4.2 Calcul de θ_3

Développement de l'équation (2.2-6) $\rightarrow$

$a3*\sin(\theta3)-d5*\cos(\theta3+\theta4) =$

$a3*\sin(\theta3)-d5*\cos(\theta3)*\cos(\theta4)+d5*\sin(\theta3)*\sin(\theta4) =$

$-d5*\cos(\theta4)*\cos(\theta3) + (a3+d5*\sin(\theta4))*\sin(\theta3) = At2$

On pose :

$At2t4= -d5*\cos(\theta4) \ ; \ Bt2t4= a3+d5*\sin(\theta4)$

L'équation devient :

$At2t4*\cos(\theta3) + Bt2t4*\sin(\theta3) = At2 \quad (2.4\text{-}6)$

on pose :

$At2t4 = R*\cos(q) \quad (2.4\text{-}7)$

$Bt2t4 = R*\sin(q) \quad (2.4\text{-}8)$

avec :

$R = \text{sqrt}(At2t4^2+ Bt2t4^2) \quad (2.4\text{-}9)$

$q = \text{atan2}(Bt2t4, At2\theta4) \quad (2.4\text{-}10)$

(2.4-6), (2.4-7) et (2.4-8) $\rightarrow$

$\cos(q)*\cos(\theta3)+\sin(q)*\sin(\theta3) = At2/R \quad (2.4\text{-}11)$

L'équation ci-dessus est de la forme $\cos(\theta3-q)=At2/R$

$$\theta31 = atan2\left(\sqrt{1-\left(\frac{At2}{R}\right)^2}, \frac{At2}{R}\right) + atan2(Bt2t4, At2t4) \quad (2.4\text{-}12)$$

$$\theta32 = atan2\left(-\sqrt{1-\left(\frac{At2}{R}\right)^2}, \frac{At2}{R}\right) + atan2(Bt2t4, At2t4) \quad (2.4\text{-}13)$$

www.infoconsult.tn

2.5 Méthode analytique avec condition : θ_3 connue, θ_2 et θ_4 inconnues

2.5.1 Calcul de θ_4

A partir du système d'équation (2.2-S2)

$$\begin{cases} v*\cos(\theta2-\theta3)-u*\sin(\theta2-\theta3)-a2*\sin(\theta3)-a3 = d5*\sin(\theta4) & (2.2\text{-}13) \\ v*\sin(\theta2-\theta3)+u*\cos(\theta2-\theta3)-a2*\cos(\theta3) = -d5*\cos(\theta4) & (2.2\text{-}14) \end{cases}$$

$\theta3$ connue, On pose :

$w = a2*\sin(\theta3)+a3 \quad , \quad x = a2*\cos(\theta3)$

Le système devient :

$$v*\cos(\theta2-\theta3)-u*\sin(\theta2-\theta3) = d5*\sin(\theta4)+w \quad (2.5\text{-}1)$$
$$v*\sin(\theta2-\theta3)+u*\cos(\theta2-\theta3) = -d5*\cos(\theta4)+x \quad (2.5\text{-}2)$$

(2.5-1)^2+(2.5-2)^2 ➔

$$-2*d5*x*\cos(\theta4)+2*d5*w*\sin(\theta4) = u^2+v^2-d5^2-x^2-w^2 \quad (2.5\text{-}3)$$

On pose

$At3 = u^2+v^2-d5^2-x^2-w^2$

$At3t4=-2*d5*x \ , \ Bt3t4=2*d5*w$

On pose :

$$At3t4 = R*\cos(q) \quad (2.5\text{-}4)$$
$$Bt3t4 = R*\sin(q) \quad (2.5\text{-}5)$$

avec :

$$R = \text{sqrt}(At3t4^2+ Bt3t4^2) \quad (2.5\text{-}6)$$
$$q = \text{atan2}(Bt3t4, At3\theta4) \quad (2.5\text{-}7)$$

(2.5-3), (2.5-4) et (2.5-5) ➔

$$\cos(q)*\cos(\theta4)+\sin(q)*\sin(\theta4) = At3/R \quad (2.5\text{-}8)$$

L'équation ci-dessus est de la forme $\cos(\theta4-q)=At3/R$

$$\theta41 = atan2\left(\sqrt{1-\left(\frac{At3}{R}\right)^2}, \frac{At3}{R}\right) + atan2(Bt3t4, At3t4) \quad (2.5\text{-}9)$$

$$\theta42 = atan2\left(-\sqrt{1-\left(\frac{At3}{R}\right)^2}, \frac{At3}{R}\right) + atan2(Bt3t4, At3t4) \quad (2.5\text{-}10)$$

2.5.2 Calcul de θ_2

A partir du système d'équation (2.2-S1)

$$\begin{cases} v*\sin(\theta2)+u*\cos(\theta2)-a2 = a3*\sin(\theta3)-d5*\cos(\theta3+\theta4) & (2.2\text{-}6) \\ v*\cos(\theta2)-u*\sin(\theta2) = a3*\cos(\theta3)+d5*\sin(\theta3+\theta4) & (2.2\text{-}7) \end{cases}$$

(2.2-7) ➔ $v*\cos(\theta2)-u*\sin(\theta2) = d5*\sin(\theta3+\theta4)+a3*\cos(\theta3)$

$\theta3$ et $\theta4$ sont connues, on pose :

At4= $d5*\sin(\theta3+\theta4)+a3*\cos(\theta3)$

www.infoconsult.tn

v = R*cos(q) (2.5-11)
u = R*sin(q) (2.5-12)
avec :
R = sqrt(v^2+ u^2) (2.5-13)
q = atan2(u, v) (2.5-14)

(2.2-7), (2.5-11) et (2.5-12) ➔
cos(q)*cos(θ4)-sin(q)*sin(θ4) = At4/R (2.5-15)

L'équation ci-dessus est de la forme cos(θ4+q)=At4/R

$$\theta 21 = atan2\left(\sqrt{1-\left(\frac{At4}{R}\right)^2}, \frac{At4}{R}\right) - atan2(u,v) \quad (2.5\text{-}16)$$

$$\theta 22 = atan2\left(-\sqrt{1-\left(\frac{At4}{R}\right)^2}, \frac{At4}{R}\right) - atan2(u,v) \quad (2.5\text{-}17)$$

2.6 Méthode analytique avec condition : θ_4 connue, θ_2 et θ_3 inconnues

2.6.1 Calcul de θ_2

A partir du système d'équation (2.2-S1)

$$\begin{cases} v*\sin(\theta 2)+u*\cos(\theta 2)-a2 = a3*\sin(\theta 3)-d5*\cos(\theta 3+\theta 4) & (2.2\text{-}6) \\ v*\cos(\theta 2)-u*\sin(\theta 2) = a3*\cos(\theta 3)+d5*\sin(\theta 3+\theta 4) & (2.2\text{-}7) \end{cases}$$

A partir de la deuxième simplification : (2.2-6)^2+(2.2-7)^2 ➔

2*a2*u*cos(θ2)+2*a2*v*sin(θ2)=a2^2+u^2+v^2-2*a3*d5*sin(θ4)-a3^2-d5^2 (2.6-1)

At4t2=2*a2*u ; Bt4t2=2*a2*v
At42= a2^2+u^2+v^2-a3^2-d5^2-2*a3*d5*sin(θ4)

At4t2*cos(θ2)+Bt4t2*sin(θ2)= At42 (2.6-2)

At4t2 = R*cos(q) (2.6-3)
Bt4t2 = R*sin(q) (2.6-4)
avec :
R = sqrt(At4t2^2+ Bt4t2^2) (2.6-5)
q = atan2(Bt4t2, At4t2) (2.6-6)

(2.6-1), (2.6-3) et (2.6-4) ➔
cos(q)*cos(θ2)+sin(q)*sin(θ2) = At42/R (2.6-7)

L'équation ci-dessus est de la forme cos(θ2-q)=At42/R

$$\theta 21 = atan2\left(\sqrt{1-\left(\frac{At42}{R}\right)^2}, \frac{At42}{R}\right) + atan2(Bt4t2, At4t2) \quad (2.6\text{-}8)$$

$$\theta 22 = atan2\left(-\sqrt{1-\left(\frac{At42}{R}\right)^2}, \frac{At42}{R}\right) + atan2(Bt4t2, At4t2) \quad (2.6\text{-}9)$$

www.infoconsult.tn

2.6.2 Calcul de θ_3

(2.2-7) ➔

$$(a3+d5*\sin(\theta4))*\cos(\theta3) + d5*\cos(\theta4)*\sin(\theta3) = v*\cos(\theta2)-u*\sin(\theta2)$$

$\theta2$ et $\theta4$ étant connues, on pose :

$$At4t3= a3+d5*\sin(\theta4) \;;\; Bt4t3= d5*\cos(\theta4)$$
$$At4t3t2= v*\cos(\theta2)-u*\sin(\theta2)$$

$$At4t3*\cos(\theta3)+Bt4t3*\sin(\theta3)= At4t3t2 \qquad (2.6\text{-}10)$$

$$At4t3 = R*\cos(q) \qquad (2.6\text{-}11)$$
$$Bt4t3 = R*\sin(q) \qquad (2.6\text{-}12)$$

avec :

$$R = \text{sqrt}(At4t3\text{^}2+ Bt4t3\text{^}2) \qquad (2.6\text{-}13)$$
$$q = \text{atan2}(Bt4t3,\ At4t3) \qquad (2.6\text{-}14)$$

(2.6-10), (2.6-13) et (2.6-14) ➔

$$\cos(q)*\cos(\theta3)+\sin(q)*\sin(\theta3) = At4t3t2/R \qquad (2.6\text{-}15)$$

L'équation ci-dessus est de la forme $\cos(\theta3-q)= At4t3t2/R$

$$\theta31 = atan2\left(\sqrt{1-\left(\frac{At4t3t2}{R}\right)^2}, \frac{At4t3t2}{R}\right) + atan2(Bt4t3, At4t3) \qquad (2.6\text{-}16)$$

$$\theta32 = atan2\left(-\sqrt{1-\left(\frac{At4t3t2}{R}\right)^2}, \frac{At4t3t2}{R}\right) + atan2(Bt4t3, At4t3) \qquad (2.6\text{-}17)$$

www.infoconsult.tn

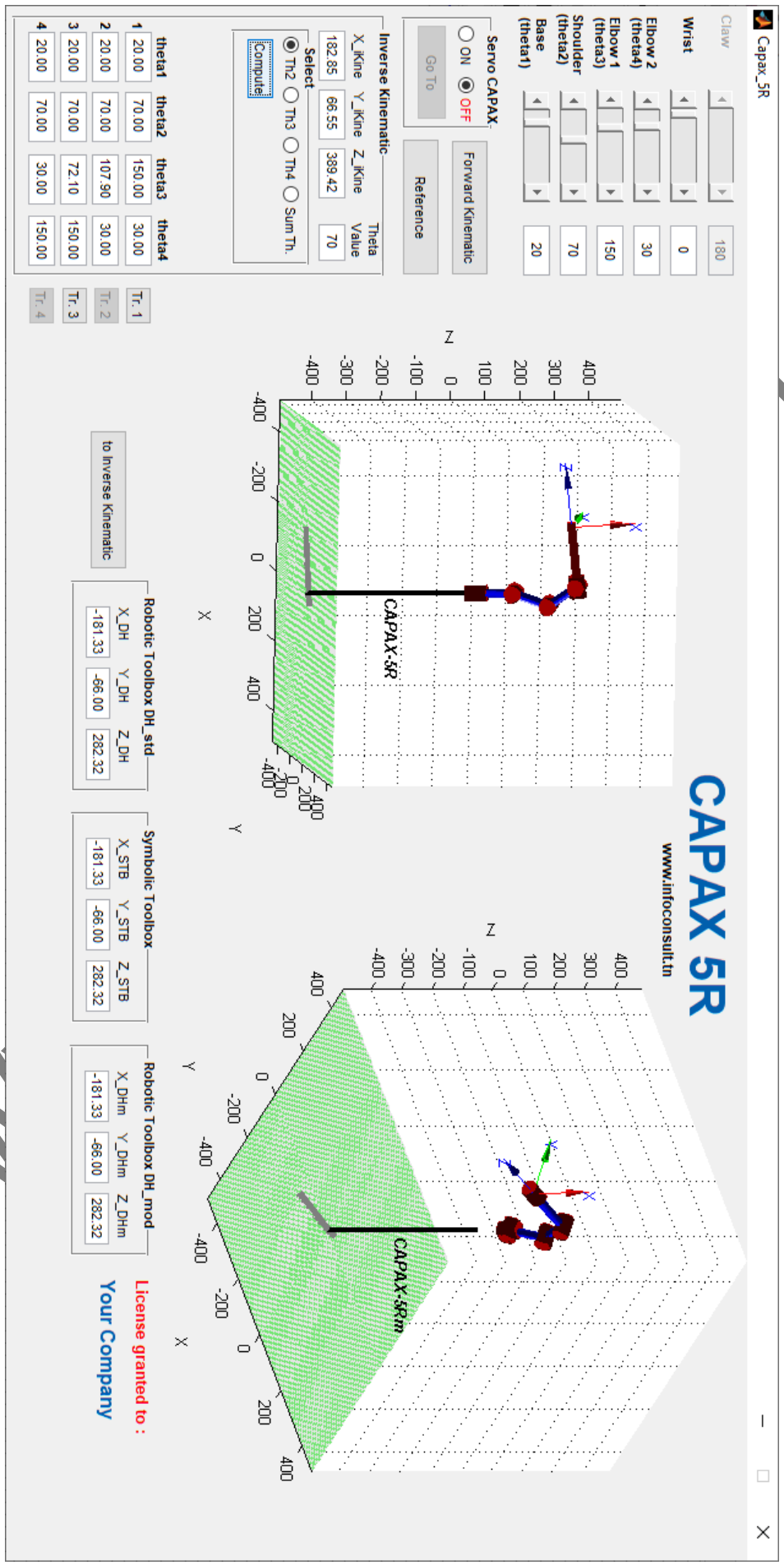

Fig. 14 : Interface Matlab Robot 5R

Annexe 1 : Formules trigonométriques usuelles pour la résolution des équations en MGI

Type	Equation	Condition	Solution
1	$\cos\theta = b$	-1 ≤ b ≤ 1	$\theta = a\tan 2\left(\pm\sqrt{1-b^2}, b\right)$; *i.e.*, both θ and $-\theta$
2	$\sin\theta = a$	-1 ≤ a ≤ 1	$\theta = a\tan 2\left(a, \pm\sqrt{1-a^2}\right)$; *i.e.*, both θ and $(180-\theta)$
3	$\sin\theta = a$ $\cos\theta = b$	-1 ≤ a ≤ 1 -1 ≤ a ≤ 1 $a^2 + b^2 = 1$	$\theta = a\tan 2(a, b)$
4	$a\cos\theta - b\sin\theta = 0$		$\left.\begin{array}{l}\theta = a\tan 2(a,b)\\ and\\ \theta = a\tan 2(-a,-b)\end{array}\right\}$ i.e., both θ and $(\theta \pm 180)$
5	$\sin\theta\sin\phi = a$ $\cos\theta\sin\phi = b$ $\cos\phi = c$		$\left.\begin{array}{l}\theta = a\tan 2(a,b)\\ and\\ \theta = a\tan 2(-a,-b)\end{array}\right\}$ i.e., both θ and $(\theta \pm 180)$ $\left.\begin{array}{l}\phi = a\tan 2\left(\sqrt{a^2+b^2}, c\right)\\ and\\ \phi = a\tan 2\left(-\sqrt{a^2+b^2}, c\right)\end{array}\right\}$ or $-\phi$
6	$a\cos\theta + b\sin\theta = c$	$a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$	$\theta = a\tan 2(b,a) + a\tan 2\left(\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}, c\right)$
7	$a\cos\theta - b\sin\theta = c$ $a\sin\theta + b\cos\theta = d$	$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$	$\theta = a\tan 2(ad-bc, ac+bd)$ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
8	$a\cos\theta + c\sin\theta = d$ $e\cos\theta + f\sin\theta = g$	af - ce > 0	θ = a tan 2(ag - de , df - cg)
9	Si l'équation est non linéaire, utiliser les transformations suivantes : $cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ $sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}$ $u = tg\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow \theta = 2tg^{-1}(u)$		

Rq :

- θ = atan2(y,x) est la fonction inverse de la tangente d'un angle rapporté au quatre quadrant du cercle trigonométrique où y = sin θ , x = cos θ.
- ϕ correspond à θ , - ϕ correspond à θ ± 180

www.infoconsult.tn