

# TP1 Robotique : Modélisation d'un bras manipulateur

## Objectif :

L'objectif de ce TP est la modélisation de deux Robots bras manipulateur RRRR et RRRRR. La modélisation est la porte d'entrée pour :

- ✿ L'étude du MGD (modèle géométrique direct) : calcul de la position de l'effecteur (ses coordonnées cartésiennes) par rapport à la base en fonction de la valeur des angles des articulations et des longueurs des liens.
- ✿ L'étude du MGI (modèle géométrique inverse) : calcul de la valeur des angles des articulations à partir des coordonnées cartésiennes de l'effecteur et des longueurs des liens.

## Plan

- ✿ Méthodologie de placement des axes Z et X selon la convention Denavit-Hartenberg (DH) et Khalil-Kleinfinger, encore appelée Denavit-Hartenberg modifiée (DH\_m).
- ✿ Calcul de la table DH.
- ✿ Calcul des matrices homogènes pour chaque articulation puis de la matrice homogène globale reliant la base à l'effecteur.
- ✿ Application pour 2 bras manipulateur : CAPAX-5R et CAPAX-4R

## 1. Introduction

La modélisation consiste à représenter le bras manipulateur par un système d'équations trigonométriques reliant la longueur des axes et l'angle des articulations aux coordonnées cartésiennes de l'effecteur dans l'espace dans un sens comme dans l'autre.

Une des représentations les plus connue est celle de Denavit-Hartenberg (DH) ou celle de Khalil-Kleinfinger encore appelée DH modifiée (DH\_m).

Un bras manipulateur est défini comme étant une succession d'articulation (Joint) et de lien (Link) se terminant par un organe effecteur. La représentation DH ou DH\_m comporte plusieurs étapes :

1. Placement des axes des repères (X, Y, Z) et leur orientation sur les articulations.
2. Détermination des paramètres  $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$  et  $\alpha_i$  pour chaque articulation.
3. Détermination de la table DH caractérisant le bras.
4. Calcul de la matrice de transformation homogène reliant chaque articulation à la suivante.
5. Calcul de la matrice de transformation homogène globale reliant la base à l'effecteur du bras manipulateur.

## 2. Modélisation DH Standard

La convention DH standard utilise les articulations d'ordre (i-1, i).

### 2.1 Méthodologie pour l'établissement des axes $X_i$ , $Y_i$ et $Z_i$ .

#### 2.1.1 Etape 1 : Axe $Z_i$

##### ☼ Direction de l'axe $Z_i$

☼ **Axes  $Z_i$**  : Numérotter les articulations de 1 à n (n : indice de la dernière articulation). Tracer son axe de rotation par une ligne. Commencer par  $Z_0$  pour l'articulation 1 et ainsi de suite. L'axe  $Z_{i-1}$  correspond à l'articulation i.

☼  **$Z_{base}$**  est //  $Z_0$ .

☼  **$Z_{eff}$**  est // à  $Z_{n-1}$ .

##### ☼ Orientation de l'axe $Z_i$ : selon la position et le sens de rotation de l'articulation :

☼ **Sens de rotation trigonométrique (CCK counter clockwise, inverse au sens horaire)** : en haut pour les articulations à rotation verticale, sortant pour les articulations à rotation transversale, le long du lien et pointé au joint suivant pour les articulations à rotation horizontale.

☼ **Sens de rotation horaire (clockwise)** : en bas pour les articulations à rotation verticale, rentrant pour les articulations à rotation transversale, le long du lien et pointé vers le joint précédent pour les articulations à rotation horizontale.

☼  **$Z_{base}$**  : même orientation que  $Z_0$ .

☼  **$Z_{eff}$**  : même orientation que  $Z_{n-1}$ .

##### ☼ Origine de l'axe $Z_i$ :

☼ **Articulation transversale** : le centre de l'articulation correspondante.

☼ **Articulation verticale ou horizontale** : le centre de l'articulation précédente.

☼  **$Z_{base}$**  : la base.

☼  **$Z_{eff}$**  : l'effecteur.

#### 2.1.2 Etape 2 : Axe $X_i$

☼ **Origine de l'axe  $X_i$**  : L'origine de l'axe  $X_i$  est la même que  $Z_i$ .

☼ **Direction et orientation de l'axe  $X_i$**  : (Si la solution est multiple, **choisir celle qui maximise le nombre de zéros dans la table DH.**)

☼  $X_0$  :  $X_0 \perp Z_0$ ,  $\rightarrow$  2 solutions sont possibles.

☼ si  $Z_i // Z_{i-1}$ ,  $X_i$  est sur leur perpendiculaire commune, ou dans une direction  $\perp$  à  $(Z_i, Z_{i-1})$ .

☼ si  $Z_i \perp Z_{i-1}$ ,  $X_i \perp$  au plan formé par  $(Z_i, Z_{i-1})$ , la solution est unique.

☼  **$X_{base}$**  : même direction et orientation que  $X_0$ .

☼  **$X_{eff}$**  : même direction et orientation que  $X_{n-1}$ .

2.1.3 Etape 3 : Axe  $Y_i$  : L'axe  $Y_i$ , non nécessaire au modèle géométrique du bras, est obtenu en utilisant la règle du "Right Hand Rule".

## 2.2 Définition des coefficients $a_i$ , $\alpha_i$ , $d_i$ et $\theta_i$

**$a_i$  : Link length** : distance de  $Z_{i-1}$  à  $Z_i$  mesurée par rapport à  $X_i$

**$\alpha_i$  : Link twist** : angle  $\widehat{Z_{i-1}, Z_i}$  mesuré par rapport à  $X_i$

**$d_i$  : Link offset** : distance de  $X_{i-1}$  à  $X_i$  mesurée par rapport à  $Z_{i-1}$  (variable pour un joint prismatique, fixe pour un joint rotoïde).

**$\theta_i$  : Joint angle** : angle  $\widehat{X_{i-1}, X_i}$  mesuré par rapport à  $Z_{i-1}$  (variable pour un joint rotoïde, fixe pour un joint prismatique).

Appliquer ces règles pour i allant de 1 à n. Les résultats seront transcrits dans la table DH.

### 2.3 Table DH standard

Link	$\theta_i$ ( $X_{i-1}, X_i$ ) / $Z_{i-1}$	$d_i$ ( $X_{i-1}, X_i$ ) / $Z_{i-1}$	$a_i$ ( $Z_{i-1}, Z_i$ ) / $X_i$	$\alpha_i$ ( $Z_{i-1}, Z_i$ ) / $X_i$
1				
2				
...				
i				
i+1				
...				
n				

### 2.4 Matrice de transformation homogène reliant chaque articulation à la suivante

La matrice de transformation homogène pour passer d'une articulation à une autre est donnée par :

$${}^{i-1}_i A = \text{trotz}(\theta_i) * \text{transl}(0,0,d_i) * \text{transl}(a_i,0,0) * \text{trotx}(\alpha_i)$$

ou encore

$${}^{i-1}_i A = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) * \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) * \sin(\alpha_i) & a_i * \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) * \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) * \sin(\alpha_i) & a_i * \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.5 Matrice de transformation homogène globale base-effecteur

$$\text{Base Effecteur} \begin{matrix} \text{Base} \\ \text{Effecteur} \end{matrix} A = {}^0_n A = {}^0_1 A * {}^1_2 A * {}^2_3 A * \dots * {}^{n-1}_n A$$

$${}^0_n A = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$P_x = {}^0_n A(1,4), P_y = {}^0_n A(2,4), P_z = {}^0_n A(3,4)$$

$P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  sont les coordonnées cartésiennes de l'effecteur par rapport à la base.

### 3. Modélisation DH modifiée

La convention DH modifiée utilise les articulations d'ordre  $(i, i+1)$

#### 3.1 Méthodologie pour l'établissement des axes $X_i$ , $Y_i$ et $Z_i$ .

##### 3.1.1 Etape 1 : Axe $Z_i$

###### ☼ Direction de l'axe $Z_i$

☼ **Axes  $Z_i$**  : Numéroté les articulations de 1 à  $n$  ( $n$  : indice de la dernière articulation). Tracer son axe de rotation par une ligne. Commencer par  $Z_1$  pour l'articulation 1 et ainsi de suite. L'axe  $Z_i$  correspond à l'articulation  $i$ .

☼  **$Z_{base}$**  est //  $Z_0$ .

☼  **$Z_{eff}$**  est // à  $Z_n$ .

###### ☼ Orientation de l'axe $Z_i$ : selon la position et le sens de rotation de l'articulation :

☼ **Sens de rotation trigonométrique (CCK counter clockwise, inverse au sens horaire)** : en haut pour les articulations à rotation verticale, sortant pour les articulations à rotation transversale, le long du lien et pointé au joint suivant pour les articulations à rotation horizontale.

☼ **Sens de rotation horaire (clockwise)** : en bas pour les articulations à rotation verticale, rentrant pour les articulations à rotation transversale, le long du lien et pointé vers le joint précédent pour les articulations à rotation horizontale.

☼  **$Z_{base}$**  : même orientation que  $Z_0$ .

☼  **$Z_{eff}$**  : même orientation que  $Z_n$ .

###### ☼ Origine de l'axe $Z_i$ :

☼ **Articulation transversale** : le centre de l'articulation correspondante.

☼ **Articulation verticale ou horizontale** : le centre de l'articulation suivante.

☼  **$Z_{base}$**  : la base.

☼  **$Z_{eff}$**  : l'effecteur.

##### 3.1.2 Etape 2 : Axe $X_i$

☼ **Origine de l'axe  $X_i$**  : L'origine de l'axe  $X_i$  est la même que  $Z_i$ .

☼ **Direction et orientation de l'axe  $X_i$**  : (Si la solution est multiple, **choisir celle qui maximise le nombre de zéros dans la table DH.**)

☼ Pour  $X_1$  :  $X_1 \perp Z_1$ ,  $\rightarrow$  2 solutions sont possibles.

☼ si  $Z_i // Z_{i+1}$ ,  $X_i$  est sur leur perpendiculaire commune, ou dans une direction  $\perp$  à  $(Z_i, Z_{i+1})$ .

☼ si  $Z_i \perp Z_{i+1}$ ,  $X_i \perp$  au plan formé par  $(Z_i, Z_{i+1})$ , la solution est unique.

☼  **$X_{base}$**  : même direction et orientation que  $X_0$ .

☼  **$X_{eff}$**  : même direction et orientation que  $X_n$ .

3.1.3 Etape 3 : Axe  $Y_i$  : L'axe  $Y_i$ , non nécessaire au modèle géométrique du bras est obtenu en utilisant la règle du "Right Hand Rule".

### 3.2 Définition des coefficients $a_{i-1}$ , $\alpha_{i-1}$ , $d_i$ et $\theta_i$

**$a_{i-1}$  : Link length** : distance de  $Z_{i-1}$  à  $Z_i$  mesurée par rapport à  $X_{i-1}$

**$\alpha_{i-1}$  : Link twist** : angle  $\widehat{Z_{i-1}, Z_i}$  mesuré par rapport à  $X_{i-1}$

**$d_i$  : Link offset** : distance de  $X_{i-1}$  à  $X_i$  mesurée par rapport à  $Z_i$  (variable pour un joint prismatique, fixe pour un joint rotoïde).

**$\theta_i$  : Joint angle** : angle  $\widehat{X_{i-1}, X_i}$  mesuré par rapport à  $Z_i$  (variable pour un joint rotoïde, fixe pour un joint prismatique).

Appliquer ces règles pour  $i$  allant de 1 à  $n$ . Les résultats seront transcrits dans la table DH.

### 3.3 Table DH modifiée

Link	$\theta_i$ ( $X_{i-1}, X_i$ ) / $Z_i$	$d_i$ ( $X_{i-1}, X_i$ ) / $Z_i$	$a_{i-1}$ ( $Z_{i-1}, Z_i$ ) / $X_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$ ( $Z_{i-1}, Z_i$ ) / $X_{i-1}$
1				
2				
...				
i				
i+1				
...				
n				

### 3.4 Matrices de transformation homogène reliant chaque articulation à la suivante

La matrice de transformation homogène pour passer d'une articulation à une autre est donnée par :

$${}^{i-1}_i A = \text{trotx}(\alpha_{i-1}) * \text{transl}(a_{i-1}, 0, 0) * \text{troty}(\theta_i) * \text{transl}(0, 0, d_i)$$

ou encore

$${}^{i-1}_i A = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \sin(\theta_i) * \cos(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i) * \cos(\alpha_{i-1}) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -d_i * \sin(\alpha_{i-1}) \\ \sin(\theta_i) * \sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i) * \sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1}) & -d_i * \cos(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.5 Matrices de transformation homogène globale base- effecteur

Elle sera le produit des différentes matrices homogènes reliant chaque articulation à la suivante :

$$\text{Base Effecteur } {}^0_n A = {}^0_1 A * {}^1_2 A * {}^2_3 A * \dots * {}^{n-1}_n A$$

$${}^0_n A = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec :

$$P_x = {}^0_n A (1,4), P_y = {}^0_n A (2,4), P_z = {}^0_n A (3,4)$$

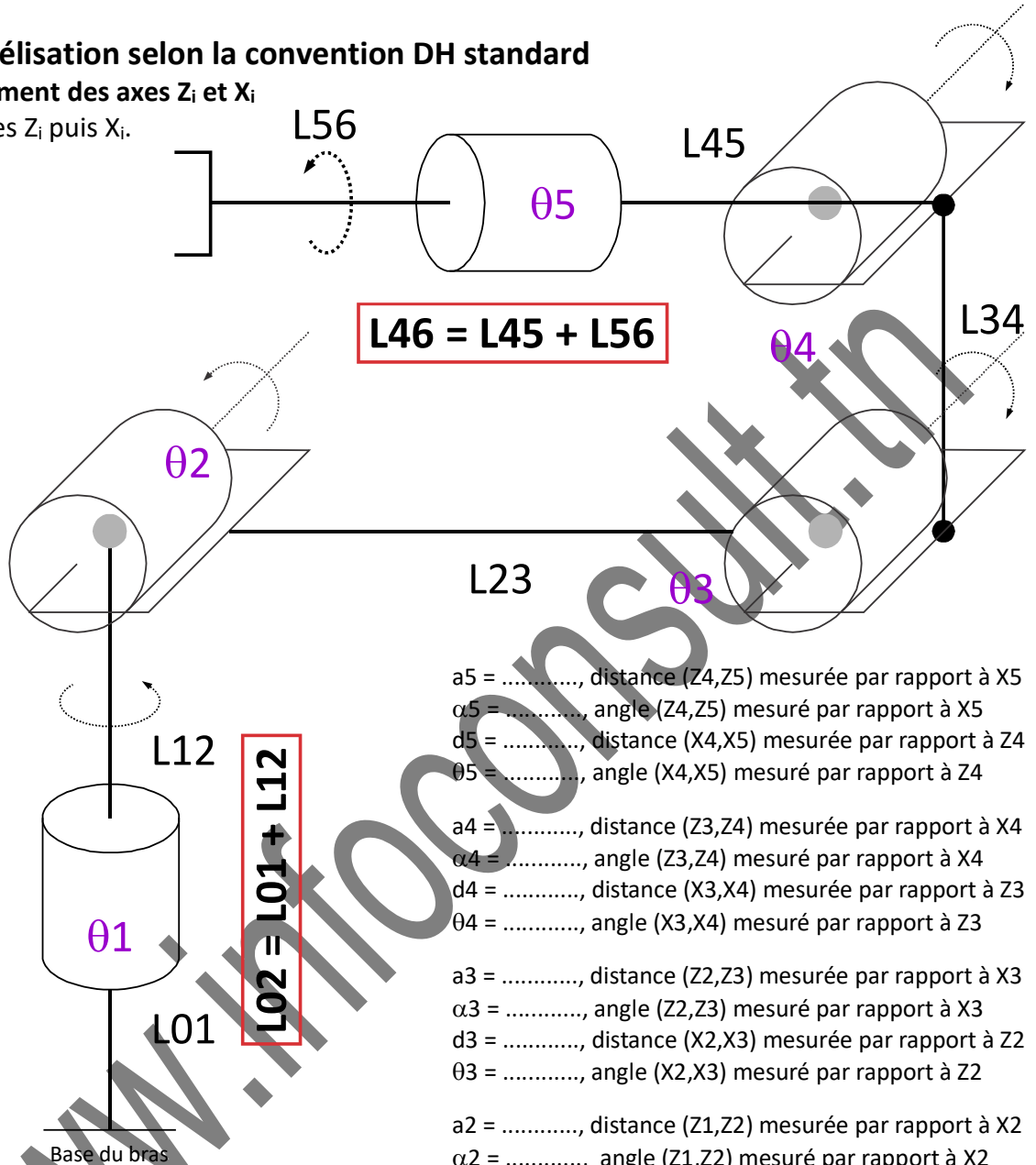
$P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  sont les coordonnées cartésiennes de l'effecteur par rapport à la base.

### 4. Ex. 1 : Robot CAPAX-5R : RRRRR 5 articulations "Revolute"

#### 4.1 Modélisation selon la convention DH standard

##### 4.1.1 Placement des axes $Z_i$ et $X_i$

Placer les axes  $Z_i$  puis  $X_i$ .



- $a_5 = \dots\dots\dots$ , distance ( $Z_4, Z_5$ ) mesurée par rapport à  $X_5$
- $\alpha_5 = \dots\dots\dots$ , angle ( $Z_4, Z_5$ ) mesuré par rapport à  $X_5$
- $d_5 = \dots\dots\dots$ , distance ( $X_4, X_5$ ) mesurée par rapport à  $Z_4$
- $\theta_5 = \dots\dots\dots$ , angle ( $X_4, X_5$ ) mesuré par rapport à  $Z_4$
- $a_4 = \dots\dots\dots$ , distance ( $Z_3, Z_4$ ) mesurée par rapport à  $X_4$
- $\alpha_4 = \dots\dots\dots$ , angle ( $Z_3, Z_4$ ) mesuré par rapport à  $X_4$
- $d_4 = \dots\dots\dots$ , distance ( $X_3, X_4$ ) mesurée par rapport à  $Z_3$
- $\theta_4 = \dots\dots\dots$ , angle ( $X_3, X_4$ ) mesuré par rapport à  $Z_3$
- $a_3 = \dots\dots\dots$ , distance ( $Z_2, Z_3$ ) mesurée par rapport à  $X_3$
- $\alpha_3 = \dots\dots\dots$ , angle ( $Z_2, Z_3$ ) mesuré par rapport à  $X_3$
- $d_3 = \dots\dots\dots$ , distance ( $X_2, X_3$ ) mesurée par rapport à  $Z_2$
- $\theta_3 = \dots\dots\dots$ , angle ( $X_2, X_3$ ) mesuré par rapport à  $Z_2$
- $a_2 = \dots\dots\dots$ , distance ( $Z_1, Z_2$ ) mesurée par rapport à  $X_2$
- $\alpha_2 = \dots\dots\dots$ , angle ( $Z_1, Z_2$ ) mesuré par rapport à  $X_2$
- $d_2 = \dots\dots\dots$ , distance ( $X_1, X_2$ ) mesurée par rapport à  $Z_1$
- $\theta_2 = \dots\dots\dots$ , angle ( $X_1, X_2$ ) mesuré par rapport à  $Z_1$
- $a_1 = \dots\dots\dots$ , distance ( $Z_0, Z_1$ ) mesurée par rapport à  $X_1$
- $\alpha_1 = \dots\dots\dots$ , angle ( $Z_0, Z_1$ ) mesuré par rapport à  $X_1$
- $d_1 = \dots\dots\dots$ , distance ( $X_0, X_1$ ) mesurée par rapport à  $Z_0$
- $\theta_1 = \dots\dots\dots$ , angle ( $X_0, X_1$ ) mesuré par rapport à  $Z_0$

##### 4.1.2 Table DH Standard

Remplir la table DH suivante :

Link	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1				
2				
3				
4				
5				

Robot Bras manipulateur CAPAX-5R modélisation DH standard

**4.1.3 Matrices de transformation homogène reliant chaque articulation à la suivante**

En appliquant l'expression générale de la matrice de transformation homogène pour chaque lien, Compléter les 5 matrices élémentaires suivantes :

$d1 = L02 = L01+L12, a2 = L23, a3 = L34, d5 = L46 = L45+L56$

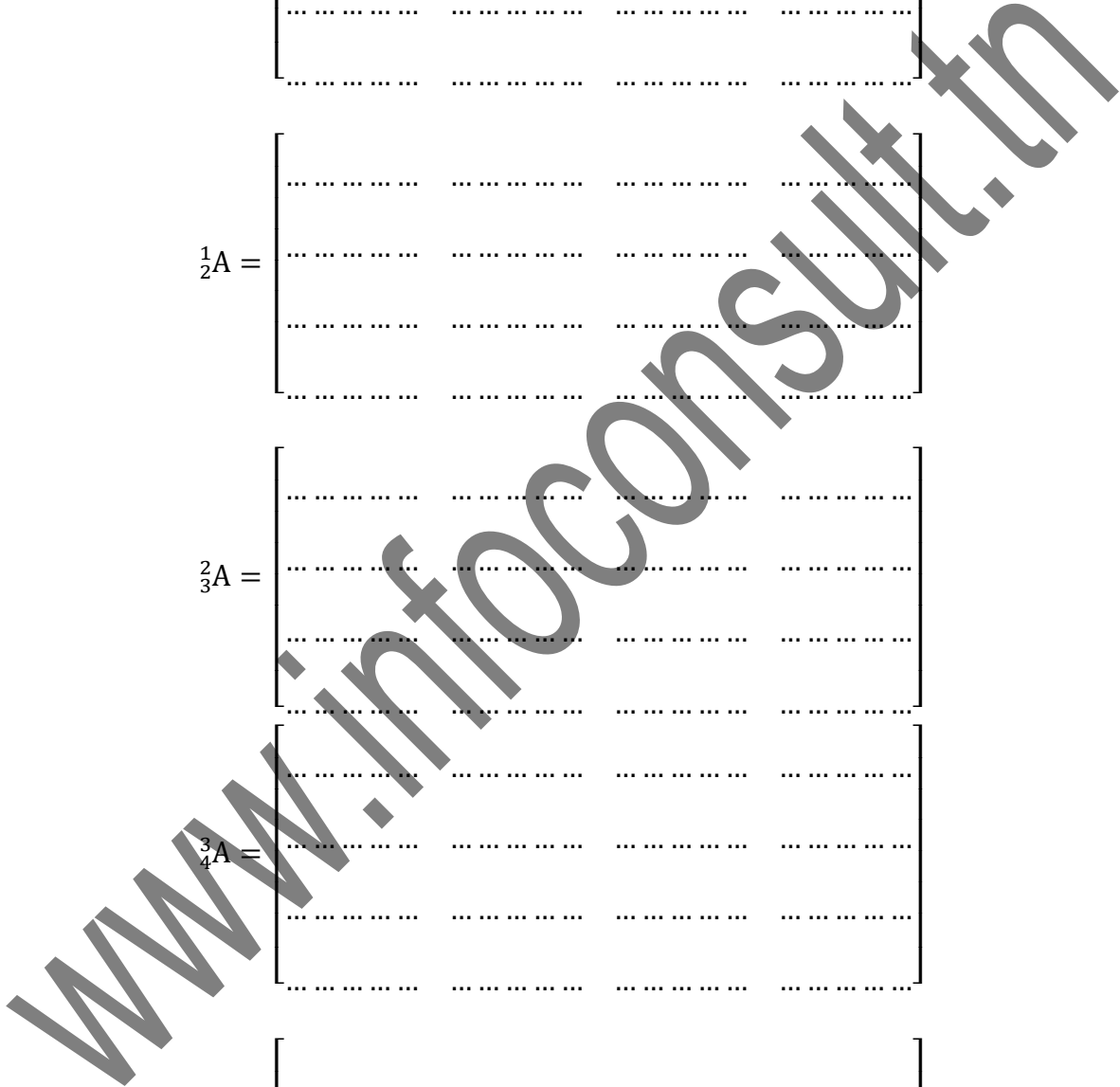
$${}^0_1A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^1_2A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^2_3A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^3_4A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^4_5A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$



#### 4.1.4 Matrices de transformation homogène globale base-effecteur

$${}^0_5A = {}^0_1A(\theta_1) * {}^1_2A(\theta_2) * {}^2_3A(\theta_3) * {}^3_4A(\theta_4) * {}^4_5A(\theta_5)$$

$${}^0_5A = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  sont les coordonnées cartésiennes de l'effecteur par rapport à la base du robot.

Vérifier que :

$$n_x = -\cos(\theta_5) * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_5)$$

$$n_y = \cos(\theta_1) * \sin(\theta_5) - \cos(\theta_5) * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4)$$

$$n_z = \cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) * \cos(\theta_5)$$

$$o_x = -\cos(\theta_5) * \sin(\theta_1) + \sin(\theta_5) * \cos(\theta_1) * \sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4)$$

$$o_y = \cos(\theta_1) * \cos(\theta_5) + \sin(\theta_5) * \sin(\theta_1) * \sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4)$$

$$o_z = -\cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) * \sin(\theta_5)$$

$$a_x = -\cos(\theta_1) * \cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4)$$

$$a_y = -\sin(\theta_1) * \cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4)$$

$$a_z = -\sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4)$$

$$P_x = -\cos(\theta_1) * (d_5 * \cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) - a_2 * \cos(\theta_2) + a_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_y = -\sin(\theta_1) * (d_5 * \cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) - a_2 * \cos(\theta_2) + a_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_z = d_1 + a_2 * \sin(\theta_2) - d_5 * \sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) + a_3 * \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

si on pose :

$$\cos(\theta_1) = c_1, \cos(\theta_2) = c_2, \cos(\theta_3) = c_3, \cos(\theta_4) = c_4, \cos(\theta_5) = c_5$$

$$\sin(\theta_1) = s_1, \sin(\theta_2) = s_2, \sin(\theta_3) = s_3, \sin(\theta_4) = s_4, \sin(\theta_5) = c_5.$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_3) = c_{23}, \sin(\theta_2 - \theta_3) = s_{23}$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) = c_{234}, \sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) = s_{234}$$

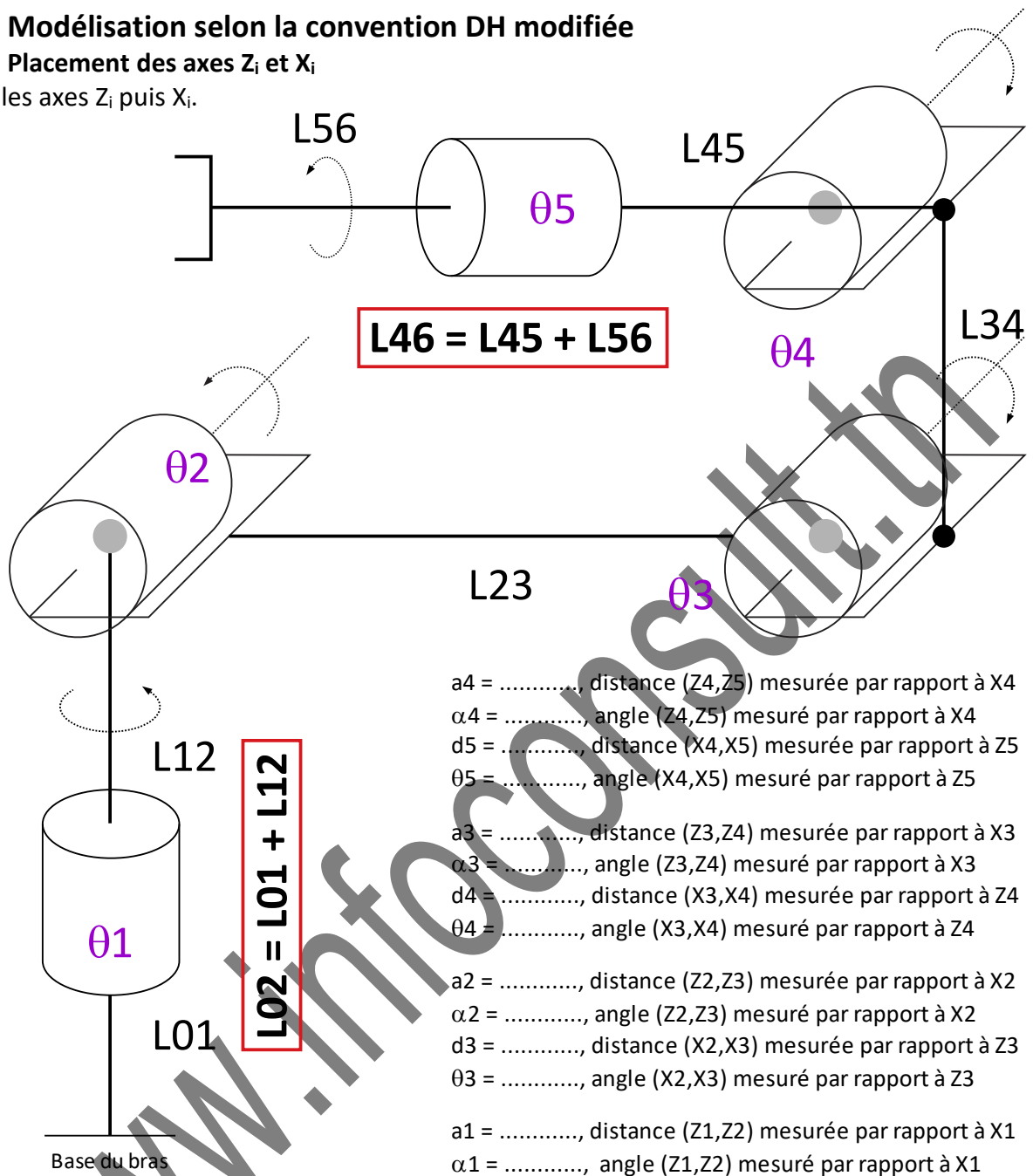
$${}^0_5A = \begin{bmatrix} -c_5 * c_1 * s_{234} - s_1 * s_5 & -c_5 * s_1 + s_5 * c_1 * s_{234} & -c_1 * c_{234} & -c_1 * (d_5 * c_{234} - a_2 * c_2 + a_3 * s_{23}) \\ c_1 * s_5 - c_5 * s_1 * s_{234} & c_1 * c_5 + s_5 * s_1 * s_{234} & -s_1 * c_{234} & -s_1 * (d_5 * c_{234} - a_2 * c_2 + a_3 * s_{23}) \\ c_{234} * c_5 & -s_5 * c_{234} & -s_{234} & d_1 + a_2 * s_2 - d_5 * s_{234} + a_3 * c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



### 4.2 Modélisation selon la convention DH modifiée

#### 4.2.1 Placement des axes $Z_i$ et $X_i$

Placer les axes  $Z_i$  puis  $X_i$ .



- a4 = ..... distance (Z4,Z5) mesurée par rapport à X4
- $\alpha_4$  = ..... angle (Z4,Z5) mesuré par rapport à X4
- d5 = ..... distance (X4,X5) mesurée par rapport à Z5
- $\theta_5$  = ..... angle (X4,X5) mesuré par rapport à Z5
- a3 = ..... distance (Z3,Z4) mesurée par rapport à X3
- $\alpha_3$  = ..... angle (Z3,Z4) mesuré par rapport à X3
- d4 = ..... distance (X3,X4) mesurée par rapport à Z4
- $\theta_4$  = ..... angle (X3,X4) mesuré par rapport à Z4
- a2 = ..... distance (Z2,Z3) mesurée par rapport à X2
- $\alpha_2$  = ..... angle (Z2,Z3) mesuré par rapport à X2
- d3 = ..... distance (X2,X3) mesurée par rapport à Z3
- $\theta_3$  = ..... angle (X2,X3) mesuré par rapport à Z3
- a1 = ..... distance (Z1,Z2) mesurée par rapport à X1
- $\alpha_1$  = ..... angle (Z1,Z2) mesuré par rapport à X1
- d2 = ..... distance (X1,X2) mesurée par rapport à Z2
- $\theta_2$  = ..... angle (X1,X2) mesuré par rapport à Z2
- a0 = ..... distance (Z0,Z1) mesurée par rapport à X0
- $\alpha_0$  = ..... angle (Z0,Z1) mesuré par rapport à X0
- d1 = ..... distance (X0,X1) mesurée par rapport à Z1
- $\theta_1$  = ..... angle (X0,X1) mesuré par rapport à Z1

#### 4.2.2 Table DH Modifiée

Remplir la table DH suivante :

Link	$\theta_i$	$d_i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$
1				
2				
3				
4				
5				

**4.2.3 Matrices de transformation homogène reliant chaque articulation à la suivante**

En appliquant l'expression générale de la matrice de transformation homogène pour chaque lien, Compléter les 5 matrices élémentaires suivantes :

$d1 = L02 = L01+L12$ ,  $a3 = L23$ ,  $a4 = L34$ ,  $d5 = L46 = L45+L56$

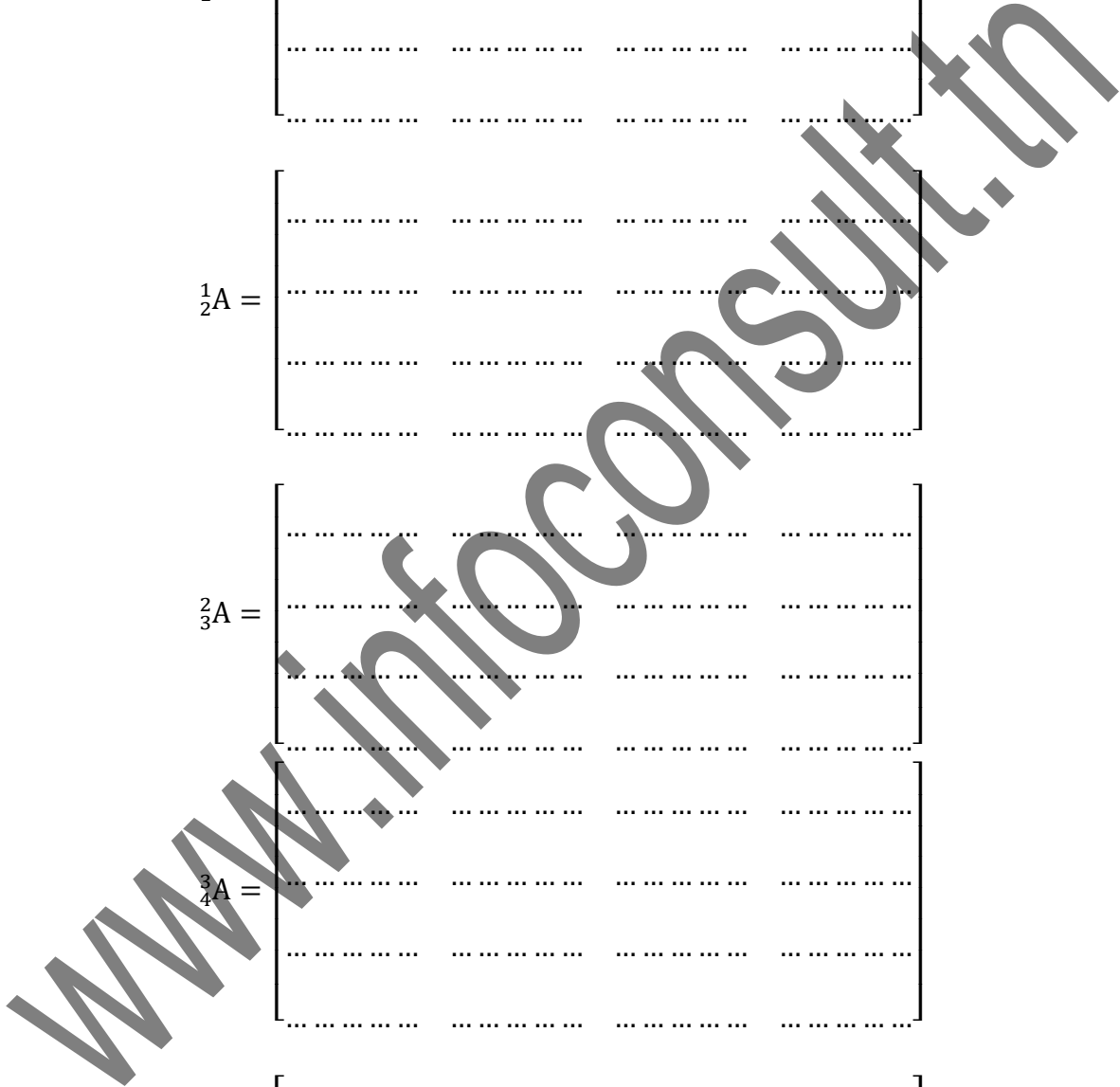
$${}^0_1A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^1_2A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^2_3A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^3_4A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^4_5A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$



#### 4.2.4 Matrice de transformation homogène globale (base- effecteur)

$${}^0_5A = {}^0_1A(\theta_1) * {}^1_2A(\theta_2) * {}^2_3A(\theta_3) * {}^3_4A(\theta_4) * {}^4_5A(\theta_5)$$

$${}^0_5A = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n_x, n_y, n_z, o_x, o_y, o_z, a_x, a_y, a_z, P_x, P_y$  et  $P_z$  sont exactement les mêmes que pour DH standard.

$P_x, P_y$  et  $P_z$  sont les coordonnées cartésiennes de l'effecteur par rapport à la base du robot.

$$P_x = -\cos(\theta_1) * (d_5 * \cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) - a_2 * \cos(\theta_2) + a_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_y = -\sin(\theta_1) * (d_5 * \cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) - a_2 * \cos(\theta_2) + a_3 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_z = d_1 + a_2 * \sin(\theta_2) - d_5 * \sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) + a_3 * \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

si on pose :

$$\cos(\theta_1) = c_1, \cos(\theta_2) = c_2, \cos(\theta_3) = c_3, \cos(\theta_4) = c_4, \cos(\theta_5) = c_5$$

$$\sin(\theta_1) = s_1, \sin(\theta_2) = s_2, \sin(\theta_3) = s_3, \sin(\theta_4) = s_4, \sin(\theta_5) = c_5.$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_3) = c_{23}, \sin(\theta_2 - \theta_3) = s_{23}$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) = c_{234}, \sin(\theta_2 - \theta_3 - \theta_4) = s_{234}$$

$${}^0_5A = \begin{bmatrix} -c_5 * c_1 * s_{234} - s_1 * s_5 & -c_5 * s_1 + s_5 * c_1 * s_{234} & -c_1 * c_{234} & -c_1 * (d_5 * c_{234} - a_2 * c_2 + a_3 * s_{23}) \\ c_1 * s_5 - c_5 * s_1 * s_{234} & c_1 * c_5 + s_5 * s_{234} & -s_1 * c_{234} & -s_1 * (d_5 * c_{234} - a_2 * c_2 + a_3 * s_{23}) \\ c_{234} * c_5 & -s_5 * c_{234} & -s_{234} & d_1 + a_2 * s_2 - d_5 * s_{234} + a_3 * c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5. Ex. 2 : Robot CAPAX-4R : RRRR 4 articulations (Revolute)

### 5.1 Modélisation selon la convention DH standard

#### 5.1.1 Placement des axes $Z_i$ et $X_i$

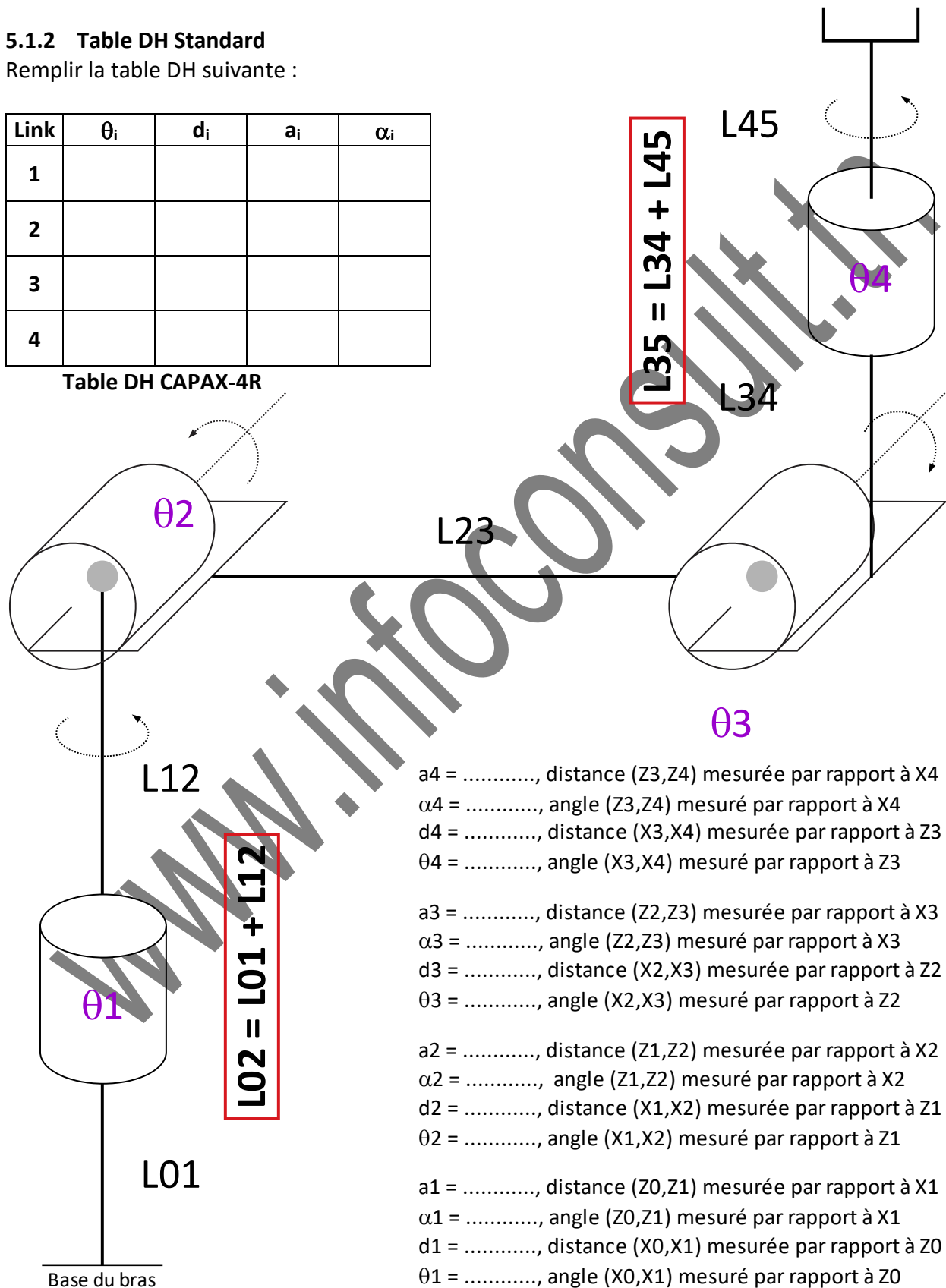
Placer les axes  $Z_i$  puis  $X_i$ .

#### 5.1.2 Table DH Standard

Remplir la table DH suivante :

Link	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1				
2				
3				
4				

Table DH CAPAX-4R



$a_4 = \dots\dots\dots$ , distance ( $Z_3, Z_4$ ) mesurée par rapport à  $X_4$   
 $\alpha_4 = \dots\dots\dots$ , angle ( $Z_3, Z_4$ ) mesuré par rapport à  $X_4$   
 $d_4 = \dots\dots\dots$ , distance ( $X_3, X_4$ ) mesurée par rapport à  $Z_3$   
 $\theta_4 = \dots\dots\dots$ , angle ( $X_3, X_4$ ) mesuré par rapport à  $Z_3$

$a_3 = \dots\dots\dots$ , distance ( $Z_2, Z_3$ ) mesurée par rapport à  $X_3$   
 $\alpha_3 = \dots\dots\dots$ , angle ( $Z_2, Z_3$ ) mesuré par rapport à  $X_3$   
 $d_3 = \dots\dots\dots$ , distance ( $X_2, X_3$ ) mesurée par rapport à  $Z_2$   
 $\theta_3 = \dots\dots\dots$ , angle ( $X_2, X_3$ ) mesuré par rapport à  $Z_2$

$a_2 = \dots\dots\dots$ , distance ( $Z_1, Z_2$ ) mesurée par rapport à  $X_2$   
 $\alpha_2 = \dots\dots\dots$ , angle ( $Z_1, Z_2$ ) mesuré par rapport à  $X_2$   
 $d_2 = \dots\dots\dots$ , distance ( $X_1, X_2$ ) mesurée par rapport à  $Z_1$   
 $\theta_2 = \dots\dots\dots$ , angle ( $X_1, X_2$ ) mesuré par rapport à  $Z_1$

$a_1 = \dots\dots\dots$ , distance ( $Z_0, Z_1$ ) mesurée par rapport à  $X_1$   
 $\alpha_1 = \dots\dots\dots$ , angle ( $Z_0, Z_1$ ) mesuré par rapport à  $X_1$   
 $d_1 = \dots\dots\dots$ , distance ( $X_0, X_1$ ) mesurée par rapport à  $Z_0$   
 $\theta_1 = \dots\dots\dots$ , angle ( $X_0, X_1$ ) mesuré par rapport à  $Z_0$

Robot Bras manipulateur CAPAX-4R modélisation DH

### 5.1.3 Matrices de transformation homogène reliant chaque articulation à la suivante

En appliquant l'expression générale de la matrice de transformation homogène pour chaque lien, Compléter les 5 matrices élémentaires suivantes :

$d1 = L02 = L01+L12$ ,  $a2 = L23$ ,  $d4 = L35 = L34+L45$

$${}^0_1A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^1_2A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^2_3A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^3_4A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

### 5.1.4 Matrices de transformation homogène globale (base- effecteur)

$${}^0_4A = {}^0_1A(\theta_1) * {}^1_2A(\theta_2) * {}^2_3A(\theta_3) * {}^3_4A(\theta_4)$$

$${}^0_4A = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  sont les coordonnées cartésiennes de l'effecteur par rapport à la base du robot.

$$n_x = \cos(\theta_4) * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_2 - \theta_3) - \sin(\theta_1) * \sin(\theta_4)$$

$$n_y = \cos(\theta_1) * \sin(\theta_4) + \cos(\theta_4) * \sin(\theta_1) * \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$n_z = \sin(\theta_2 - \theta_3) * \cos(\theta_4)$$

$$o_x = -\cos(\theta_4) * \sin(\theta_1) - \sin(\theta_4) * \cos(\theta_1) * \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$o_y = \cos(\theta_1) * \cos(\theta_4) - \sin(\theta_4) * \sin(\theta_1) * \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$o_z = -\sin(\theta_2 - \theta_3) * \sin(\theta_4)$$

$$a_x = -\sin(\theta_2 - \theta_3) * \cos(\theta_1)$$

$$a_y = -\sin(\theta_2 - \theta_3) * \sin(\theta_1)$$

$$a_z = \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

$$P_x = \cos(\theta_1) * (a_2 * \cos(\theta_2) - d_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_y = \sin(\theta_1) * (a_2 * \cos(\theta_2) - d_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_z = d_1 + a_2 * \sin(\theta_2) + d_4 * \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

Si on désigne par :

$$\cos(\theta_1) = c_1, \cos(\theta_2) = c_2, \cos(\theta_3) = c_3, \cos(\theta_4) = c_4,$$

$$\sin(\theta_1) = s_1, \sin(\theta_2) = s_2, \sin(\theta_3) = s_3, \sin(\theta_4) = s_4.$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_3) = c_{23}, \sin(\theta_2 - \theta_3) = s_{23}$$

$${}^0_4A = \begin{bmatrix} c_4 * c_1 * c_{23} - s_1 * s_4 & -c_4 * s_1 - c_1 * s_4 * c_{23} & -s_{23} * c_1 & c_1 * (a_2 * c_2 - d_4 * s_{23}) \\ c_1 * s_4 + c_4 * s_1 * c_{23} & c_1 * c_4 - s_1 * s_4 * c_{23} & -s_{23} * s_1 & s_1 * (a_2 * c_2 - d_4 * s_{23}) \\ s_{23} * c_4 & -s_{23} * s_4 & c_{23} & d_1 + a_2 * s_2 + d_4 * c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5.2 Modélisation selon la convention DH modifiée

### 5.2.1 Placement des axes $Z_i$ et $X_i$

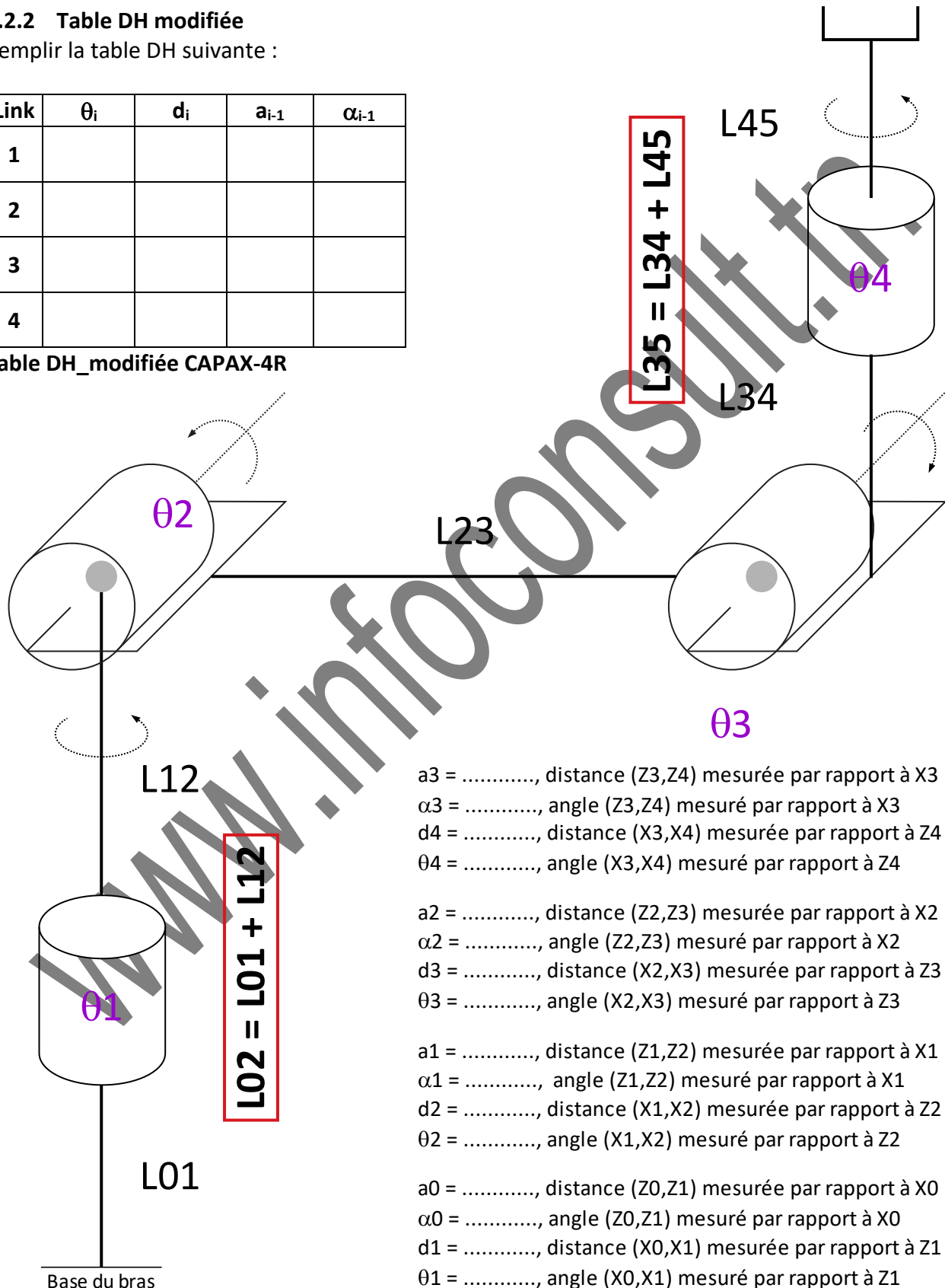
Placer les axes  $Z_i$  puis  $X_i$ .

### 5.2.2 Table DH modifiée

Remplir la table DH suivante :

Link	$\theta_i$	$d_i$	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$
1				
2				
3				
4				

Table DH\_modifiée CAPAX-4R



Robot Bras manipulateur CAPAX-4R modélisation DH modifiée

### 5.2.3 Matrices de transformation homogène reliant chaque articulation à la suivante

En appliquant l'expression générale de la matrice de transformation homogène pour chaque lien, Compléter les 5 matrices élémentaires suivantes :

$d1 = L02 = L01+L12$ ,  $a3 = L23$ ,  $d4 = L35 = L34+L45$

$${}^0_1A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^1_2A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^2_3A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$${}^3_4A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$



### 5.2.4 Matrices de transformation homogène globale base-effecteur

$${}^0_4A = {}^0_1A(\theta_1) * {}^1_2A(\theta_2) * {}^2_3A(\theta_3) * {}^3_4A(\theta_4)$$

$${}^0_4A = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  sont les coordonnées cartésiennes de l'effecteur par rapport à la base du robot.  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ ,  $o_x$ ,  $o_y$ ,  $o_z$ ,  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ ,  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_z$  sont exactement les mêmes que pour DH standard.

$$P_x = \cos(\theta_1) * (a_3 * \cos(\theta_2) - d_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_y = \sin(\theta_1) * (a_3 * \cos(\theta_2) - d_4 * \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$P_z = d_1 + a_3 * \sin(\theta_2) + d_4 * \cos(\theta_2 - \theta_3)$$

Si on désigne par :

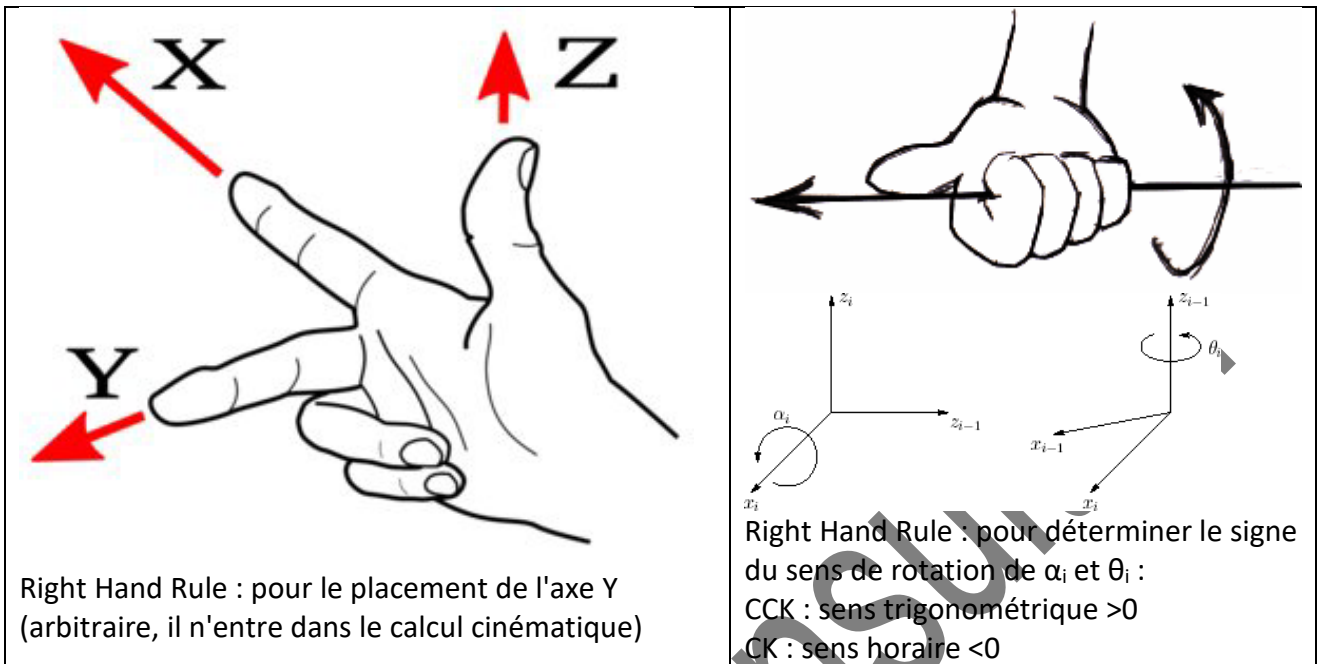
$$\cos(\theta_1) = c_1, \cos(\theta_2) = c_2, \cos(\theta_3) = c_3, \cos(\theta_4) = c_4,$$

$$\sin(\theta_1) = s_1, \sin(\theta_2) = s_2, \sin(\theta_3) = s_3, \sin(\theta_4) = s_4.$$

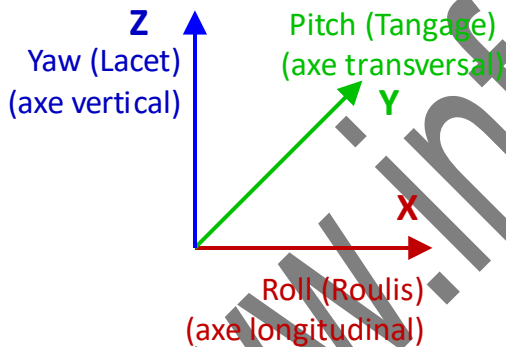
$$\cos(\theta_2 - \theta_3) = c_{23}, \sin(\theta_2 - \theta_3) = s_{23}$$

$${}^0_4A = \begin{bmatrix} c_4 * c_1 * c_{23} - s_1 * s_4 & -c_4 * s_1 - c_1 * s_4 * c_{23} & -s_{23} * c_1 & c_1 * (a_3 * c_2 - d_4 * s_{23}) \\ c_1 * s_4 + c_4 * s_1 * c_{23} & c_1 * c_4 - s_1 * s_4 * c_{23} & -s_{23} * s_1 & s_1 * (a_3 * c_2 - d_4 * s_{23}) \\ s_{23} * c_4 & -s_{23} * s_4 & c_{23} & d_1 + a_3 * s_2 + d_4 * c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Annexes :



## Définition des angles Roll - Pitch - Yaw (Roulis - Tangage - Lacet)



- ✱ **Roulis (roll)** : rotation d'un angle  $\varphi$ , autour de l'axe longitudinal.
- ✱ **Tangage (pitch)** : rotation d'un angle  $\theta$ , autour de l'axe transversal.
- ✱ **Lacet (yaw)** : rotation d'un angle  $\psi$ , autour de l'axe vertical.